Essentiels du programme de première S

Second degré

Fonctions

- connaître le sens de variations des fonctions de référence, allure de leurs courbes représentatives
- savoir étudier la position relative de deux courbes
- connaitre les dérivées des fonctions usuelles
- savoir utiliser les propriétés sur la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient
- connaitre l'équation réduite de la tangente en a
- savoir dresser le tableau de variations d'une fonction, lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction
- extremum d'une fonction

Suites

- connaître la définition d'une suite et sa notation
- savoir déterminer par le calcul et à la calculatrice les termes d'une suite définie par récurrence
- savoir étudier la monotonie d'une suite
- définition d'une suite arithmétique, formule explicite
- savoir démontrer qu'une suite est arithmétique
- définition d'une suite géométrique, formule explicite
- savoir démontrer qu'une suite est géométrique
- savoir calculer les sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique

Géométrie plane

- colinéarité de deux vecteurs
- équation cartésienne d'une droite, vecteurs directeurs et vecteurs normaux

Produit scalaire

- connaître la définition du produit scalaire
- propriétés et différentes expressions du produit scalaire

Trigonométrie

- connaître les valeurs particulières des cosinus et sinus
- connaître la définition d'un angle orienté de vecteurs et les propriétés
- savoir résoudre les équations trigonométriques

Variable aléatoire

- connaître la définition d'une variable aléatoire
- savoir calculer l'espérance, la variance et l'écart-type

Loi binomiale

- savoir reconnaître un schéma de Bernoulli
- savoir utiliser la calculatrice pour calculer des probabilités

Recueil d'exercices

Exercice 1 :

Soit la fonction g définie pour tout réel par $g(x) = |2x - 1| + |-2x + 6|$.

1) Écrire la fonction g sans valeur absolue.
2) Tracer la courbe représentative de g.

Exercice 2 :

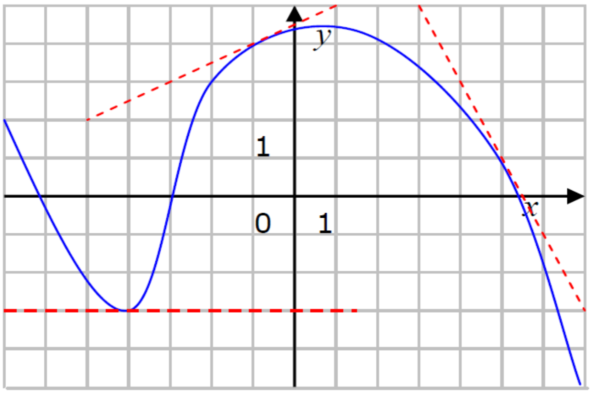
Soient f et g des fonctions définies sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{1+\sqrt{x}} + \frac{2x+3}{1-\sqrt{x}}$ et $g(x) = \frac{4x+6}{1-x}$. Montrer que les fonctions f et g sont égales.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{(-2x^2 + 2x + 12)(5\,x + 1)}$. Déterminer l'ensemble de définition de f.

Exercice 4 :

Soit la courbe représentative d'une fonction f.



Déterminer l'équation réduite des tangentes aux points d'abscisses $-4, -1$ et 5.

Exercice 5:

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f_1(x) = x^2 + 1$

$f_2(x) = x^3 + x^2 - 6$

$f_3(x) = x^4 + \frac{1}{x} - 5\sqrt{(x)}$

$f_4(x) = (\sqrt{x} + 1)(x^2 - 2)$

$f_5(x) = (2x\sqrt{x} - x)(x + 4)$

$f_6(x) = \frac{2x + 1}{3x - 5}$

$f_7(x) = \frac{-3x^2 + 2}{x + 1}$

Exercice 6 :

1) Pour les fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition et dresser leur tableau de variations.

a) $f(x) = \frac{-3x}{1+x^2}$ ***b)*** $g(x) = \frac{-x^2+2x+11}{x^2-2x-3}$

2) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-3}{2x+4}$ puis étudier les variations de cette fonction.

Exercice 7 :

La fonction f définie sur IR par $f(x) = ax^3 + bx^2 - ax + c$ $(a \neq 0)$ n'admet aucun extremum. Vrai ou faux ?

Exercice 8 :

1) Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 3n$ par $w_n = \frac{3n+1}{n-2}$.

a) Déterminer w_3 et w_{12}.

b) Exprimer w_{n+1} et w_{2n} en fonction de n.

2) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} =- 4u_n + 2$ et $u_0 = 3$

a) Calculer u_1 et u_3.

b) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.

3) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = v_n + 2n - 5$ et $v_0 = -1$.

Calculer v_1.

Exercice 9 :

Déterminer si les suites (u_n) définies pour tout entier naturel *n* sont arithmétiques ou géométriques. Si oui, préciser le premier terme et la raison de la suite.

1) $u_n = 4n + 5$
2) $u_n = 5^{n+2}$
3) $u_n = \frac{n}{2} + 5$
4) $u_n = \frac{n^2+3n+2}{n+2}$
5) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$
6) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -2 + u_n \end{cases}$

Exercice 10 :

Dans chacun des cas suivant, (u_n) est une suite arithmétique de raison *r*. Ecrire u_n en fonction de *n,* puis déterminer u_{50}.

1) $u_0 = 3$ et $r = -3$
2) $u_0 = -57$ et $r = \frac{1}{2}$
3) $u_0 = 23$ et $r = 2$

Exercice 11 :

Soient deux termes d'une suite arithmétique (u_n). Ecrire u_n en fonction de *n* et déterminer u_4.

1) $u_5 = 4$ et $u_{10} = 49$
2) $u_6 = 17$et $u_{10} = 15$

Exercice 12 :

Dans chacun des cas suivants, (u_n) est une suite géométrique de raison *q*. Ecrire u_n en fonction de *n,* puis déterminer u_5.

1) $u_0 = 4$ et $q = 5$
2) $u_0 = \frac{1}{3}$ et $q = -\frac{1}{2}$

Exercice 13 :

Soient deux termes d'une suite géométrique (u_n). Ecrire u_n en fonction de *n* et déterminer u_4.

1) $u_3 = 2$ et $u_4 = 18$
2) $u_2 = 5$ et $u_6 = 405$

Remarque : pour certaines suites, il peut y avoir plusieurs raisons possibles.

Exercice 14 :

Calculer les sommes suivantes :

1) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 31$
2) $\sum_{i=0}^{9} 3i$
3) $1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + 1024$
4) $10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \cdots + 10^{-6}$

Exercice 15 :

1) Dans un repère, soient $A(\,1\,;\,-2\,), B(\,3\,;\,5\,)\,, C(\,1\,;\,-1\,)\; et\; D(\,x\,;\,3\,)$. Déterminer *x* pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

2) Soit ABC un triangle. Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$. Déterminer les coordonnées de M dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

3) Dans un repère, soient $A(\,-2\,;\,3\,), B(\,3\,;\,1\,)\,, C(\,-1\,;\,-3\,)$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la médiane passant par A dans le triangle ABC.

4) Dans un repère, $A(\,4\,;\,0\,), B(\,2\,;\,-3\,)\,, C(\,2\,;\,1\,)$ et le vecteur $\vec{u}(3;5)$.
   a) Tracer la droite (AC) et la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}$.
   b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AC).
   c) Le point $E(-3;\frac{7}{2})$appartient-il à la droite (AC)?
   d) Déterminer une équation cartésienne de la droite d.
   e) Etudier la position relative des droites (AC) et (BD) avec $D(3\,;5)$.

5) Dans le repère du plan utilisé à la question 4), tracer les droites $d_1: 2x + 3y - 5 = 0$ et $d_2: 2x + 5 = 0$. Justifier.

Exercice 16 :

On considère trois points $A(3\,;4)\,, B(-2\,;5)\; et\; C(0\,;-1)$. Déterminer une équation de la hauteur issue de C dans ABC et de la médiatrice de [BC].

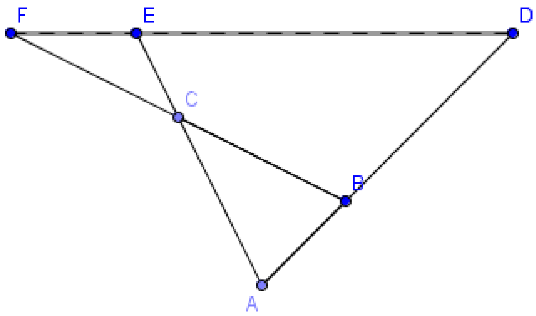
Exercice 17 :

A, B et C sont trois points non alignés. Les points D, E et F sont définis par

$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$.

1) Déterminer les coordonnées des points A, B , C, D, E et F dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

2) En déduire que les points D, E et F sont alignés.



Exercice 18 :

Le plan est muni d'un repère orthomormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1) Déterminer une équation du cercle C_1 de centre $A(-2\,;1)$ et de rayon 5.

2) Déterminer une équation du cercle C_2 de diamètre [BC] avec $B(-1\,;2)$ et $C(3\,;-1)$.

3) a) Déterminer l'ensemble E d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$.

b) Etudier l'intersection de E et de la droite d'équation $x - 2y + 1 = 0$.

Exercice 19 :

Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

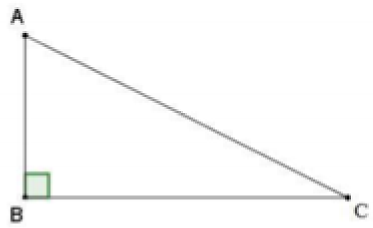
1) ABC est un triangle tel que $AB = 6\ cm,\ AC = 4\ cm$ et $BC = 7cm$.

2) Dans un repère orthonormal, $A(2\,;4), B(-1\,;3) et\ C(1\,;-2)$.

3) $AB = 6\ cm,\ AC = 5\ cm$ et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}\ radians$.

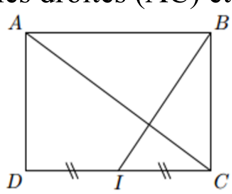
4) $AB = 2\ cm,\ AC = 6\ cm$

5) $AB = 6\ cm$



Exercice 20 :

Soit a un nombre réel strictement positif. On considère le rectangle ABCD tel que : $AB = a$; $AD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.
On note I le milieu de [CD]. Démontrer que les droites (AC) et (BI) sont perpendiculaires.



Exercice 21 :

Soient les points $A(1\,;4), B(-2\,;-1)\ et\ C(3\,;1)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Donner la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au dixième.

Exercice 22 :

1. a) Déterminer la mesure principale des angles suivants: $\frac{-159\pi}{6}$ et $\frac{135\pi}{4}$.

b) En déduire le cosinus et le sinus de : $\frac{-159\pi}{6}$ et $\frac{135\pi}{4}$.

2. Soit a un réel de l'intervalle $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$tel que $\cos a = \frac{2}{5}$. Déterminer $\sin a$.

Exercice 23:

1)a) Déterminer la mesure principale de $\frac{759\pi}{4}$.

b) En déduire le cosinus et le sinus de : $\frac{759\pi}{4}$.

2) Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ dans$\mathbb{R}$

b) $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi; \pi]$.

c) $2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 2 = 0$dans $\mathbb{R}$.

3) A l'aide d'un tableau de signes, résoudre l'inéquation $\sin x(2\sin x + 1) \leq 0$ dans $[0; 2\pi]$. On pourra s'aider de cercles trigonométriques.

Exercice 24:

On donne une mesure de l'angle orienté suivant : $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{-\pi}{4}[2\pi]$

Donner une mesure de chacun des angles orientés suivants :

a) $(-\vec{v}; \overrightarrow{2u})$ b) $(\vec{v}; 3\vec{u})$ c) $(-5\vec{u}; 2\vec{v})$ d) $(-\vec{v}; -\vec{u})$

Exercice 25 :

Sur la figure ci-dessous,

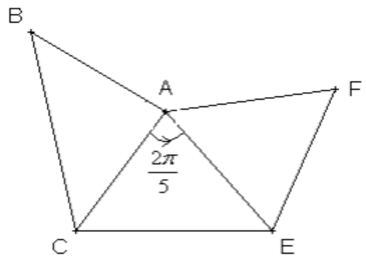
-ACE est un triangle isocèle direct de sommet principal A et tel que $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}) = \frac{2\pi}{5}[2\pi]$

-AEF est un triangle équilatéral

-ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

Déterminer une mesure de chacun des angles orientés suivants :

a) $(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB})$ b) $(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{BC})$ c) $(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{CB})$



Exercice 26 :

Une entreprise fabrique un produit destiné à l'exportation.

Sur le marché extérieur, la demande *X* (en milliers d'unités) est régie par la loi de probabilité suivante :

x_i	1	2	3	4	5
$p(X=x_i)$	$6a$	$4a$	$2a$	$2a$	a

Déterminer la valeur de *a*.

Exercice 27 :

Pour une compétition internationale, le sélectionneur doit choisir entre deux tireurs à l'arc dont les performances sont définies par les lois de probabilités ci-dessous. A chaque tir dans la cible, on associe un nombre de points. Plus la flèche est proche du centre de la cible, plus le nombre de points est élevé. On note X et Y les variables aléatoires donnant le nombre de points obtenus à chaque tir respectivement par le tireur A et le tireur B

Loi de X

Tireur A	1	2	3	4	5	10
probabilité	0,16	0,15	0,2	0,25	0,18	0,06

Loi de Y

Tireur A	1	2	3	4	5	10
probabilité	0,03	0,1	0,51	0,21	0,11	0,04

Calculer l'espérance et l'écart-type de X et de Y. On pourra utiliser la calculatrice.

Compte-tenu de ces informations, quel tireur va choisir le sélectionneur ? Justifier votre réponse.

Exercice 28 :

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques de trois couleurs : rouge, vert, bleu. Tous les secteurs sont équiprobables, quel que soit le lancer.
Cette roue se compose de 3 secteurs rouges, 4 secteurs bleus et n secteurs bleus, n étant un entier naturel non nul.
Si le rouge sort, le joueur gagne 6€.
Si le bleu sort, le joueur perd 3€.
S'il tombe sur le vert, il relance la roue : si le vert sort il ne gagne rien, si le rouge sort il gagne 1€, si le bleu sort, il perd 2€.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue de la partie. Pour quelle(s) valeur(s) de n, ce jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 29 :
Un pépiniériste conditionne des bulbes de fleurs. On conviendra qu'un bulbe germe s'il donne naissance à une plante qui fleurit. On considère que le pépiniériste dispose d'un très grand nombre de bulbes et que la probabilité qu'un bulbe germe est de 0,83. Il prélève au hasard successivement quinze bulbes de ce stock.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de bulbes qui germent.
1) Quelle est la loi de X?
2) Quelle est la probabilité qu'exactement 5 bulbes choisis germent ?
3) Quelle est la probabilité qu'au moins 1 bulbe germe ?
4) Combien peut-on espérer de fleurs ?

Exercice 30 :
Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.
Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5% des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.
On note : • D l'évènement : « le lecteur MP3 est défectueux »
• R l'évènement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».
1. Faire un arbre pondéré.
2. a. Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.
b. On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux. Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,8942.
4. Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.
a. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où un lecteur MP3 a été accepté à l'issue de ces quatre contrôles. Déterminer la loi de X.
b. Quelle est la probabilité qu'un lecteur soit accepté lors des chacun des quatre contrôles ?
c. Quelle est la probabilité qu'un lecteur soit accepté exactement trois fois lors des quatre contrôles ?

Eléments de correction :

Exercice 3 :$D =]-\infty;-2] \cup \left[-\frac{1}{5};3\right]$
Exercice 4 : $T_{-4}: y = -3$ $T_{-1}: y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ $T_5: y = -2x + 11$
Exercice 5 :$f'_5(x) = 5x\sqrt{x} + 12\sqrt{x} - 2x - 4$; $f'_7(x) = \frac{-3x^2-6x-2}{(x+1)^2}$;
Exercice 6 : Pour la fonction g, $D =]-\infty;-3[\cup]-3;1[\cup]1;+\infty[$ puis $g'(x) = -16\frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$ ce qui permet d'affirmer que g est croissante sur $]-\infty;-3[\cup]-3;1[$ et décroissante sur $]1;+\infty[$
Exercice 7 :faux : $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - a$ et f n'admet aucun extremum si et seulement si f' ne change pas de signe, càd si et seulement si $\Delta < 0$, avec $\Delta = 4b^2 - 4 \times 3a \times (-a)$ qui est un nombre strictement positif ($a \neq 0$).
Exercice 14 :2) $\sum_{i=0}^{9} 3i = 3 \times \sum_{i=0}^{9} i = 3 \times \frac{9}{2} \times 10 = 135$ 3) $\sum_{k=0}^{10} (-2)^k = 1 \times \frac{1-(-2)^{11}}{1-(-2)} = 683$
4) $\sum_{k=0}^{6} (10^{-1})^k + 10 = 10 + \frac{1-10^{-7}}{1-10^{-1}}$;

Exercice 16 :
Une équation de la hauteur est $-5x + y + 1 = 0$ et une équation de la médiatrice est $x - 3y + 7 = 0$.
Exercice 17 :A(0 ;0) B(1 ;0) C(0 ;1) D(3 ;0) E(0 ;$\frac{3}{2}$) et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}$ (à prouver !) donc $F(-1; 2)$.
$\overrightarrow{DE}\left(-3; \frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{DF}(-4; 2)$. det($\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}$) $= \cdots = 0$ d'où la réponse.
Exercice 18 :2) Il s'agit en fait du cercle de centre I(1 ;$\frac{1}{2}$) et de rayon $\frac{5}{2}$ puisque $BC = 5$.
3)C'est le cercle de centre I(2 ;-1) et de rayon $\sqrt{10}$ et les intersections cherchées sont les points P(-1 ;0) et Q(3 ;2)
Exercice 20 ***: on peut également résoudre cet exercice en décomposant les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BI}$.***
Dans le repère orthonormé $\left(D; \frac{\overrightarrow{DC}}{DC}, \frac{\overrightarrow{DA}}{DA}\right)$, $A\left(0; a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C(a; 0)$, $B(a;\ a\frac{\sqrt{2}}{2})$ et I($\frac{a}{2}$; 0).
Alors $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BI} = \cdots = 0\ d'o$ù la réponse.
Exercice 21 :$\overrightarrow{AB}(-3; -5), \overrightarrow{AC}(2; -3)$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -6 + 15 = 9$ et et $AB = \sqrt{34}$ et AC $= \sqrt{13}$
de plus, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ d'où $\widehat{BAC} \approx 64{,}7°$.
Exercice 22 : 2) $sin^2 a = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$ et $\sin a < 0$ donc $\sin a = -\frac{\sqrt{21}}{5}$
Exercice 23 : 2)a) $x = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$
b) Dans $\mathbb{R}$, $x = -\frac{\pi}{36} + 2k\frac{\pi}{3}\quad ou \quad x = \frac{7\pi}{36} + 2k\frac{\pi}{3}\quad avec\ k\epsilon\mathbb{Z}$.
Dans $]-\pi; \pi]$, $S = \left\{-\frac{25\pi}{36}; -\frac{17\pi}{36}; -\frac{\pi}{36}; \frac{7\pi}{36}; \frac{23\pi}{36}; \frac{31\pi}{36}\right\}$
c) Posons $X = \cos x$ L'équation revient à résoudre $2X^2 + 3X - 2 = 0$, ce qui donne
$X = -2\ (impossible)\ ou\ X = \frac{1}{2}$. Finalement, $x = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$
3) On étudie le signe de $\sin x$ et de $2\sin x + 1$ dans $[0; 2\pi]$. Puis le signe du produit de ces deux expressions. Finalement, $S = \left[\pi; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$.
Exercice 25 :
$\left(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB}\right) = \frac{23}{30}\pi[2\pi]$ b) $\left(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{49}{60}\pi[2\pi]$ c) $(\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{CB}) = \frac{31}{60}\pi[2\pi]$
Exercice 27 :
Pour X, $E = 3{,}56$ et $\sigma \approx 2{,}094$ et pour Y, $E = 3{,}55$ et $\sigma \approx 1{,}58$. Les espérances étant sensiblement les mêmes ; le sélectionneur choisira plutôt le joueur B dont l'écart-type est le plus faible, c'est-à-dire dont les résultats sont les plus fiables.
Exercice 28 :
Loi de X

k	-3	-2	0	1	6
$P(X = k)$	$\frac{n}{n+7}$	$\frac{4n}{(n+7)^2}$	$\frac{16}{(n+7)^2}$	$\frac{12}{(n+7)^2}$	$\frac{3}{n+7}$

$$E(X) = \cdots = \frac{-3n^2 - 11n + 138}{(7+n)^2}$$
On cherche n tel que $E(X) > 0$. On trouve n entier compris entre 0 et 5.

Exercice 29 :
1) X suit la loi binomiale de paramètres n=15 et p=0,83
2) $P(X = 5) \approx 2{,}38 \times 10^{-5}$
3) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1$
4) $E(X) = 15 \times 0{,}83 = 12{,}45$ On peut espérer environ 12 fleurs.