EXERCICE 1 :

1) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$
   Etudier la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de cette fonction.
   Déterminer l'ensemble de dérivabilité de cette fonction, puis sa fonction dérivée.

2) Pour effectuer un sondage, un institut réalise une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.
   L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1200 réponses.
   Quel temps moyen exprimé en heures l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x + 3 \ \ pour\ tout\ x \in]-\infty; -1] \\ f(x) = \frac{2}{x^2+1}\ pour\ tout\ x \in]-1; +\infty[\end{cases}$

   La fonction f est-elle continue en -1 ?
   La fonction f est-elle dérivable en -1 ?

EXERCICE 2 :

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.

1) Dresser le tableau de variations complet de g.
2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution réelle α dont on donnera une valeur approchée à 0,01 près.
3) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B :

Soit f la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2x + 1}{x+1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles de la courbe représentative C de f .
3) En utilisant la ***partie A***, étudier les variations de f.

EXERCICE 3 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle$[0; +\infty[$ par $f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$.
On admettra que f est dérivable sur l'intervalle$[0; +\infty[$.
On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe C représentative de f ainsi que la droite D d'équation $y = x$.

1) Démontrer que f est croissante sur l'intervalle$[0; +\infty[$.
2) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle$[0; +\infty[$. On note α la solution. On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Sur la figure, en utilisant la courbe C et la droite D, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.
   Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
4) a) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ où α est le réel défini dans la question 2.
   b) Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.

5) Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

a) Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
b) Compléter l'algorithme en annexe pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.
c) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

EXERCICE 4

Une nouvelle attraction est ouverte dans un grand parc.
Pour tout entier naturel non nul n, on note $p_n = P(T_n)$ la probabilité de l'événement

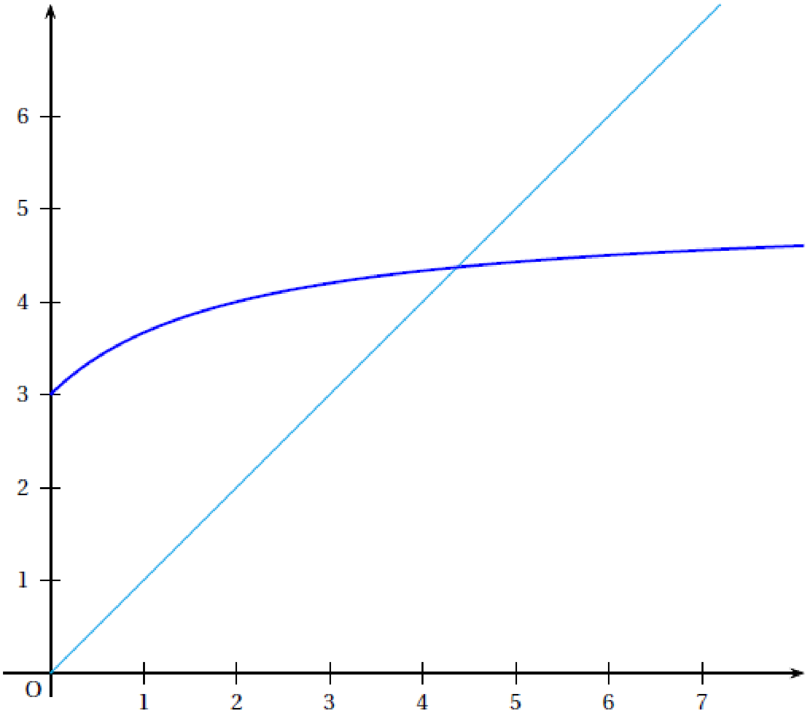
T_n: « un problème technique se produit le jour n sur cette attraction ».

On suppose qu'aucun problème technique ne survient lors de la mise en service correspondant au premier jour. D'après des études sur des attractions du même type, il a été observé que :

- si un problème technique se produit le jour n, alors la probabilité qu'un problème technique se produise le jour suivant est $\frac{3}{5}$.
- si l'attraction fonctionne le jour n, alors la probabilité qu'elle n'ait pas de problème technique le jour suivant est $\frac{5}{7}$.

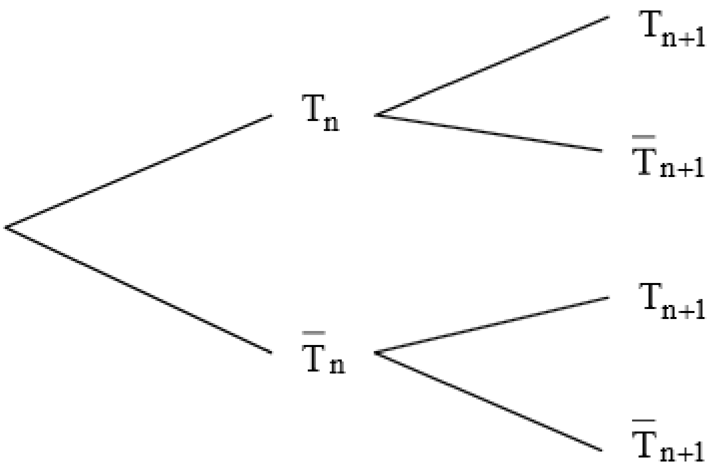
1) a) Donner les probabilités p_1 , $p_{T_1}(T_2)$ et $p_{\overline{T_1}}(T_2)$.
b) Justifier alors que $p_2 = \frac{2}{7}$. On pourra utiliser un arbre de probabilités.
2) Calculer la probabilité que l'attraction ne subisse aucun problème technique la première semaine.
3) a) Compléter l'arbre donné en annexe.
b) Montrer que $p_{n+1} = \frac{11}{35}p_n + \frac{2}{7}$.
4) On définit la suite (u_n) avec $n \geq 1$ par $u_n = p_n - \frac{5}{12}$.
a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
c) Calculer la limite de p_n . Interpréter ce résultat.

ANNEXE - Exercice 3



Entrée :	n un entier naturel.
Variables :	u et s sont des variables réelles,
	n et i sont des variables entières.
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	demander la valeur de n.
Traitement :	Tant que . . .
	affecter à i la valeur i +1
	affecter à u la valeur . . .
	affecter à s la valeur . . .
	fin Tant que.
Sortie :	afficher s.

ANNEXE - Exercice 4



EXERCICE 1 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^2}=+\infty$ en tant que limite de fonction composée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ en tant que somme de limites.

$\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+x^2}=+\infty$. Il y a donc une forme indéterminée pour déterminer la limite en $-\infty$ de la somme $x+\sqrt{1+x^2}$.

Pour tout réel x, $x-\sqrt{1+x^2}\neq 0$ (en effet, , $x-\sqrt{1+x^2}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow x\geq 0\ et\ x^2=1+x^2$ ce qui est impossible)

Donc $f(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})(x-\sqrt{1+x^2})}{(x-\sqrt{1+x^2})}=\frac{x^2-(1+x^2)}{(x-\sqrt{1+x^2})}=-\frac{1}{(x-\sqrt{1+x^2})}$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+x^2}=+\infty$ d'après ce qui précède, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1+x^2}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\sqrt{1+x^2}=-\infty$ en tant que somme de limites.

Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ en tant que quotient de limites.

Pour tout réel x, $1+x^2\geq 1>0$ donc l'ensemble de dérivabilité de f est $\mathbb{R}$.

$f'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

2) Lors du sondage téléphonique il y a eu 10 contacts par demi-heure, soit 20 contacts par heure.
La probabilité que la personne appelée accepte de répondre est $p = 0{,}4$.
Soit n le nombre de personnes contactées par téléphone.
Lorsqu'une personne est contactée, soit elle accepte de répondre avec une probabilité de 0,4, soit elle ne l'accepte pas.
On considère l'événement S : « accepter de répondre lorsqu'on est contacté »
On réalise ainsi une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,4.
On répète n fois cette expérience, de manière identique et indépendante (car on suppose que chaque personne répond indépendamment des autres), et on considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès S obtenus.
X suit la loi binomiale de paramètres $(n; 0{,}4)$.
Obtenir un échantillon de 1 200 personnes qui acceptent de répondre, c'est considérer que l'espérance mathématique est $E(X) = 1200$.
On cherche alors n tel que : $E(X) = n \times 0{,}4 = 1200$, soit $n = 3000$.
Avec 3 000 personnes contactées, on peut espérer que 1 200 acceptent de répondre.
Le temps moyen nécessaire est donc de $t = \frac{3000}{20}=150$ heures

3) f est continue et dérivable à droite en -1 en tant que fonction polynôme.
$f(-1)=1-3+3=1$ et $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2}{x^2+1}=\frac{2}{1+1}=1=f(-1)$ donc f est continue en -1.

Soit $\varepsilon>0$. $\frac{f(-1+\varepsilon)-f(-1)}{(-1+\varepsilon)-(-1)}=\frac{\frac{2}{(-1+\varepsilon)^2+1}-1}{\varepsilon}=\frac{2-2+2\varepsilon-\varepsilon^2}{\varepsilon(2-2\varepsilon+\varepsilon^2)}=\frac{2-\varepsilon}{(2-2\varepsilon+\varepsilon^2)}$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\frac{f(-1+\varepsilon)-f(-1)}{(-1+\varepsilon)-(-1)}=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\frac{2-\varepsilon}{2-2\varepsilon+\varepsilon^2}=1$$

$$\frac{f(-1-\varepsilon)-f(-1)}{(-1-\varepsilon)-(-1)}=\frac{(-1-\varepsilon)^2+3(-1-\varepsilon)+3-1}{-\varepsilon}=\frac{\varepsilon^2-\varepsilon}{-\varepsilon}=1-\varepsilon$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\frac{f(-1-\varepsilon)-f(-1)}{(-1-\varepsilon)-(-1)}=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}1-\varepsilon=1$$

Finalement, soit $\varepsilon\neq 0$. $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\frac{f(-1+\varepsilon)-f(-1)}{(-1+\varepsilon)-(-1)}=1$
Ainsi f est dérivable en -1 et $f'(-1)=1$

EXERCICE 2 :

Partie A :

1) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et $g'(x) = 6x^2 + 4x - 2 = 2(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

   Pour $x \neq 0$, $g(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = x^3\left(2 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$ en tant que produit de limites dans les deux cas.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{17}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) $g(-2) = -3$

   Sur $]-\infty; -2]$, g est continue (en tant que fonction polynôme) et strictement croissante, donc pour tout x appartenant à $]-\infty; -2]$, $g(x) \leq g(-2) < 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

   Sur $[-2; -1]$, g est continue (en tant que fonction polynôme) , strictement croissante, et $g(-2) = -3$ $g(-2) < 0$ et $g(-1) = 3$ $g(-1) > 0$. En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet exactement une solution sur cet intervalle.

   Sur $]-1; +\infty[$, g admet un minimum , c'est $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{17}{27}$, donc pour tout x appartenant à $]-1; +\infty[$, $g(x) \geq g\left(\frac{1}{3}\right) > 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

   Finalement, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution réelle a et $a \approx -1{,}74$

3)

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B :

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R}, x + 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq -1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

2) Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2x + 1}{x+1} = \frac{x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (par opération sur les limites).

   De façon analogue, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (par opération sur les limites).

   La courbe n'admet donc aucune asymptote en l'infini.

   $\lim\limits_{x\to-1}(x^3 - x^2 + 2x + 1) = -3$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty$ (par quotient de limites)

   La courbe admet donc une asymptote verticale : la droite d'équation $x = -1$.

3) f est dérivable sur D_f et $f'(x) = \frac{(3x^2 - 2x + 2)(x+1) - (x^3 - x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

   Ainsi, étudier le signe de $f'(x)$ équivaut à étudier celui de $g(x)$.

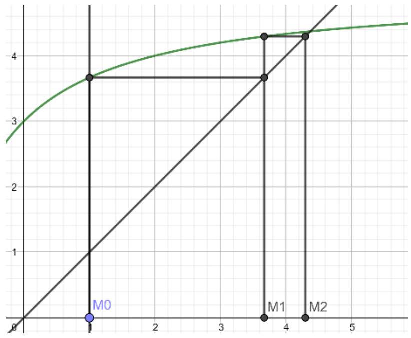
   On en déduit donc :

x	$-\infty$		a		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\approx 14{,}56$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE 3 :

1) f est dérivable sur l'intervalle$[\,0;+\infty[$ et $f'(x)=+\frac{4}{(x+2)^2}$
Pour tout réel x appartenant à l'intervalle$[\,0;+\infty[$, $f'(x)>0$ donc f est croissante sur cet intervalle.

2) Sur l'intervalle$[\,0\,;+\infty[$, $f(x)=x \Leftrightarrow 5-\frac{4}{x+2}=x \Leftrightarrow 5x+6=x^2+2x \;\; car\; x\neq -2$
$$\Leftrightarrow x^2-3x-6=0$$
$\Delta=9+24=33$ donc l'équation admet deux racines réelles $\frac{3-\sqrt{33}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{33}}{2}$.
Finalement, dans l'intervalle$[\,0\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=x$ admet une et une seule solution α et $\alpha=\frac{3+\sqrt{33}}{2}\approx 4{,}37$



3) On peut supposer la suite croissante et convergente.

4) a) Montrons par récurrence sur n la propriété H_n: $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq\alpha$
Initialisation : $u_0=1$ et $u_1=\ f(u_0)=5-\frac{4}{1+2}=\frac{11}{3}$
Comme $1\leq u_0\leq u_1\leq\alpha$, la propriété H_0 est vérifiée.

Hérédité :
Soit k un entier naturel.
Supposons que la propriété H_k est vérifiée. Montrons que la propriété H_{k+1} est vérifiée aussi.
La fonction f étant croissante sur $[\,0;+\infty[$, puisque d'après H_k on a : $0\leq u_k\leq u_{k+1}\leq\alpha$, il vient : $f(0)\leq f(u_k)\leq f(u_{k+1})\leq f(\alpha)$.
Or $f(0)=3$ et $f(\alpha)=\alpha$. Ainsi $3\leq u_{k+1}\leq u_{k+2}\leq\alpha$, d'où $0\leq u_{k+1}\leq u_{k+2}\leq\alpha$, ce qui prouve que la propriété H_{k+1} est vérifiée.

La récurrence est établie, donc pour tout entier naturel n, $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq\alpha$.

b) La suite (u_n) étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est convergente par le théorème de convergence monotone sur les suites.

5) Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

a) $S_0=u_0=1$; $S_1=S_0+u_1=1+\frac{11}{3}=\frac{14}{3}\approx 4{,}67$; $S_2=S_1+u_2=\frac{14}{3}+\frac{73}{17}=\frac{457}{51}\approx 8{,}96$.

b)

Traitement :	Tant que $.i<n+1$ . . affecter à i la valeur $i+1$ affecter à u la valeur . $5-\frac{4}{u+2}$ . . affecter à s la valeur $.s+u$ . . fin Tant que.

c) Pour tout entier $k\geq 0$, $u_k\geq u_0$ puisque pour tout entier n, $u_n\leq u_{n+1}$.
Ainsi, $\sum_{k=0}^{n}u_k\geq(n+1)\times u_0$, d'où $S_n\geq n+1$
La suite (S_n) diverge donc vers $+\infty$ par le théorème de comparaison des suites.

EXERCICE 4

1) a) $p_1 = 0 \quad p_{T_1}(T_2) = \frac{3}{5} \qquad p_{\overline{T_1}}(T_2) = \frac{2}{7}$

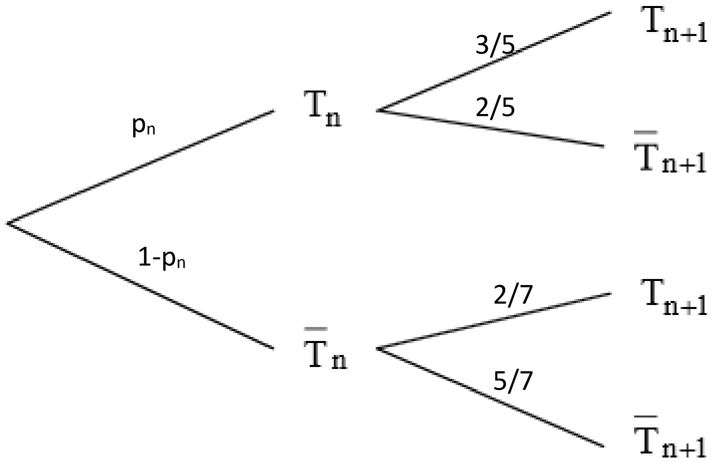
b) $p_2 = P(T_2)$

T_1 et $\overline{T_1}$ forment une partition de l'univers. En vertu de la formule des probabilités totales,

$$p(T_2) = p(T_2 \cap T_1) + p(T_2 \cap \overline{T_1}) = p_1 \times p_{T_1}(T_2) + p(\overline{T_1}) \times p_{\overline{T_1}}(T_2) = \frac{2}{7}$$

2) $p(\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \overline{T_3} \cap \overline{T_4} \cap \overline{T_5} \cap \overline{T_6} \cap \overline{T_7}) = \left(\frac{5}{7}\right)^6$

3) a) Compléter l'arbre donné en annexe.



b) T_n et $\overline{T_n}$ forment une partition de l'univers. En vertu de la formule des probabilités totales,
$p_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_{n+1} \cap T_n) + p(T_{n+1} \cap \overline{T_n}) = p_n \times \frac{3}{5} + (1 - p_n) \times \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + p_n\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{7}\right) = \frac{2}{7} + \frac{11}{35}p_n$

4) On définit la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{5}{12}$.

a) Soit n un entier naturel non nul.

$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{5}{12} = \frac{2}{7} + \frac{11}{35}p_n - \frac{5}{12} = -\frac{11}{84} + \frac{11}{35}\left(u_n + \frac{5}{12}\right) = \frac{11}{35}u_n - \frac{11}{84} + \frac{11}{84} = \frac{11}{35}u_n$

Ainsi la suite (u_n) est la suite géométrique de raison $\frac{11}{35}$et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{5}{12} = -\frac{5}{12}$

b) Alors pour tout entier naturel n non nul, $u_n = -\frac{5}{12}\left(\frac{11}{35}\right)^{n-1}$

d'où $p_n = u_n + \frac{5}{12} = \frac{5}{12} - \frac{5}{12}\left(\frac{11}{35}\right)^{n-1}$

c) $-1 < \frac{11}{35} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = \frac{5}{12}$, ce qui peut se traduire par : « en moyenne, il y a 5 chances sur 12 qu'un problème technique se produise chaque jour sur cette attraction ».