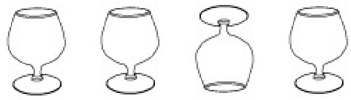
# Énoncés

Archives du "Club math" (2018/2019)[1]

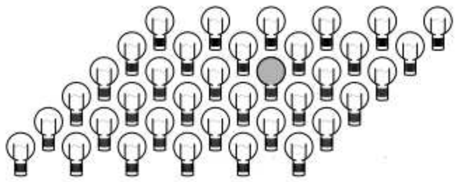
**Exercice 1 :** Solution de l'exercice 1 :

On dispose quatre verres comme sur la figure ci-dessous. Est-il possible, en les retournant deux par deux, de les placer tous à l'endroit ?



**Exercice 2 :** Solution de l'exercice 2 :

Trente-six ampoules sont rangées en grille $6 \times 6$. On dispose d'un interrupteur pour chaque ligne, qui, quand il est utilisé, éteint toutes les ampoules allumées de la ligne et allume les ampoules éteintes de cette ligne. De même il y a un interrupteur pour chaque colonne. Au départ, une seule ampoule est allumée. Peut-on, en manipulant les interrupteurs, éteindre toutes les ampoules ?



**Exercice 3 :** Solution de l'exercice 3 :

Vingt-deux arbres sont disposés en rond. Sur chaque arbre se pose un corbeau. A chaque minute, deux corbeaux s'envolent de leurs arbres et se posent sur un arbre voisin. Est-il possible qu'après un certain temps tous les corbeaux soient sur le même arbre ?

**Exercice 4 :** Solution de l'exercice 4 :

Une feuille de papier est déchirée en trois morceaux. Ensuite, l'un de ces morceaux est déchiré de nouveau en trois morceaux, et ainsi de suite. Peut-on obtenir, en fin de compte, un total de cent morceaux ?

**Exercice 5 :** Solution de l'exercice 5 :

On écrit les nombres $1, 2, 3, \cdots, 2013$ sur une feuille de papier, puis on choisit deux nombres quelconques qu'on efface et on les remplace par leur différence. Est-il possible que le dernier nombre restant soit 2 ?

**Exercice 6 :** Solution de l'exercice 6 :

Un « magicien » lance sur la table quelques pièces de monnaie, puis il tourne le dos à un « spectateur », en lui indiquant de retourner une pièce à chaque fois qu'il le lui demandera.

Au bout d'un certain nombre de retournements, le magicien demande au spectateur de poser sa main sur l'une des pièces, pour la cacher.

Le magicien se retourne alors, et est en mesure de dire si la pièce cachée est côté « pile » ou côté « face. »

Comment a-t-il procédé ?

**Exercice 7 :** Solution de l'exercice 7 :

Peut-on recouvrir exactement le quadrillage de la figure 1 (auquel on a enlevé deux carreaux) par des éléments à deux carreaux comme sur la figure 2 ?

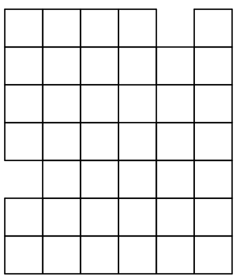


figure 1

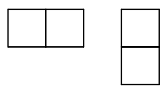


figure 2

1. Merci au site animath, auquel j'ai emprunté nombre d'exercices, et sur lequel on trouvera des cours et des exercices de préparation aux compétitions mathématiques.

**Exercice 8 :** Solution de l'exercice 8 :
Peut-on recouvrir exactement le quadrillage de la figure 1 (auquel on a enlevé deux carreaux, repérés par des croix) par des éléments à deux carreaux comme sur la figure 2 ?
On observera que l'argument développé dans l'**exercice 7** ne s'applique pas ici, et on cherchera à utiliser la figure 3.
Répondre alors à la même question lorsque l'on enlève deux carreaux quelconques mais de couleurs différentes.

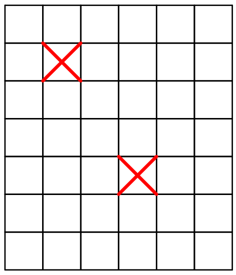


figure 1

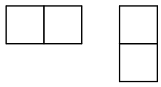


figure 2

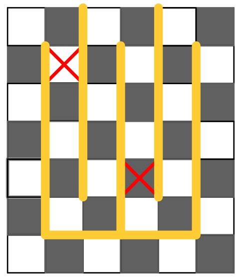
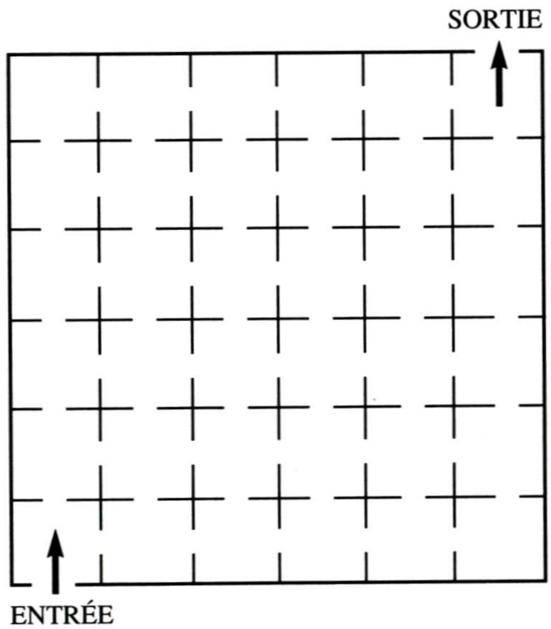


figure 3

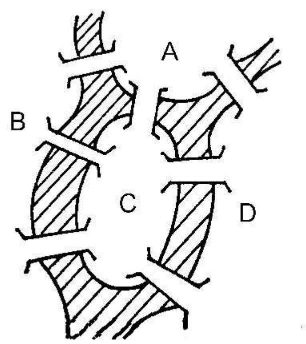
**Exercice 9 :** Solution de l'exercice 9 :

Une grande salle (grand carré ci-contre), est constituée de pièces (petits carrés) comportant une porte au milieu de chaque mur intérieur.
Cette salle est munie d'une entrée et d'une sortie, indiquées ci-contre.
Peut-on entrer puis sortir de cette salle en étant passé une seule fois à l'intérieur de chacune des pièces ?




**Exercice 10 :** Solution de l'exercice 10 :

Ci-contre, de l'eau, des rives (B et D), deux îles (A et C), des ponts...
Est-il possible, en partant d'une rive, de parcourir, en marchant, les sept ponts une fois et une seule ?
Peut-on, de plus, revenir au point de départ ?




**Exercice 11 :** Solution de l'exercice 11 :
On considère une réunion impliquant N personnes, lesquelles vont serrer la main d'un certain nombre de tierces personnes.
Prouver qu'à chaque instant, le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est nécessairement pair.

**Exercice 12 :** Solution de l'exercice 12 :
Prouver que le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, c'est-à-dire qu'il n'est pas le quotient de deux nombres entiers relatifs.

**« Principe des tiroirs » (première forme) :**
Si on place $n+1$ objets dans $n$ tiroirs, alors un tiroir (au moins) contiendra au moins deux objets.

*En effet, si chaque tiroir contenait au plus un objet, les $n$ tiroirs contiendraient en tout au plus $n$ objets.*

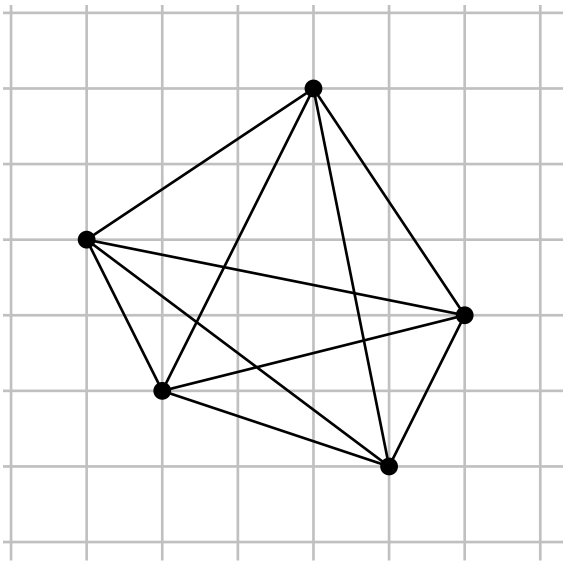
**Exercice 13 :** Solution de l'exercice 13 :
Un sac contient des billes rouges et des billes bleues.
Combien de billes faut-il extraire du sac pour être sûr d'en avoir deux de la même couleur ?

**Exercice 14 :** Solution de l'exercice 14 :
Les points du plan sont coloriés de telle sorte que chaque point soit rouge ou bleu.
Prouver que pour tout réel $x$ strictement positif, il existe une couleur telle qu'on puisse trouver deux points de cette couleur distants de $x$.

**Exercice 15 :** Solution de l'exercice 15 :
Les points du plan sont coloriés de telle sorte que chaque point soit rouge ou bleu.
Prouver qu'il existe une couleur telle que pour tout réel $x$ strictement positif, on puisse trouver deux points du plan de cette même couleur distants de $x$.

**Exercice 16 :** Solution de l'exercice 16 :
29 personnes se rencontrent, chacune serrant la main à toutes les autres. Prouver qu'à n'importe quel moment de la rencontre, il y a toujours au moins deux personnes qui ont serré exactement le même nombre de mains.
Cela se généralise-t-il à $N$ personnes ?

**Exercice 17 :** Solution de l'exercice 17 :
On place 5 points sur une grille (*). Prouver que l'on peut en trouver deux parmi eux qui forment un segment dont le milieu est lui aussi sur la grille.
*(*) Un point sur une grille est ici un point situé à l'intersection d'une ligne horizontale et d'une ligne verticale.*



**« Principe des tiroirs » (deuxième forme) :**
Si on place $kn+1$ objets dans $n$ tiroirs, alors un tiroir (au moins) contient au moins $k+1$ objets.
En effet, si chaque tiroir contenait au plus $k$ objets, les $n$ tiroirs contiendraient en tout au plus $kn$ objets.

**Exercice 18 :** Solution de l'exercice 18 :
Prouver que parmi 25 personnes, trois au moins sont nées le même mois.

**Exercice 19 :** Solution de l'exercice 19 :
On place 51 points dans un carré de côté 1, de manière quelconque.
Prouver qu'on peut trouver un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ contenant au moins trois d'entre eux (le cercle peut déborder du carré).

**Exercice 20 :** Solution de l'exercice 20 :
Dans un groupe de 2018 personnes, certaines se connaissent et d'autres non. On admet que si A connaît B, alors B connaît également A .
Prouver que deux personnes (au moins) ont le même nombre de connaissances.

Est-ce généralisable à $N$ personnes ?

**Exercice 21 :** Solution de l'exercice 21 :
On fait un jeu : on commence avec une pile de 2018 jetons. On retire un jeton, puis on coupe la pile en deux piles (pas forcément égales). À chaque étape on enlève un jeton à l'une des piles et on coupe une pile en deux (pas forcément la même). Le but du jeu est d'arriver à une configuration où toutes les piles sont hautes de 3 jetons.
Est-ce possible ? (Si on retire un jeton à une pile de 1 jeton, on considère qu'on a une pile de 0 jeton).

**Exercice 22 :** Solution de l'exercice 22 :
Prouver qu'il est toujours possible de choisir 11 chiens parmi 101 dalmatiens de telle sorte que le nombre total de leurs taches soit un multiple de 11.

**Exercice 23 :** Solution de l'exercice 23 :
Prouver que pour tour tout nombre entier naturel non nul $n$, il existe un multiple non nul de $n$ s'écrivant avec au plus $n$ chiffres 0 ou 1.
Par exemple : $22 \times 5 = 110$, $13 \times 77 = 1001$, $258 \times 3879845 = 1001000010$.
On peut créer un programme (en Python, par exemple) qui donne un tel multiple (mais le temps de calcul peut être trop long).
Mais surtout on cherche à **prouver** l'existence d'un tel nombre, **rigoureusement**, et dans tous les cas.

**Exercice 24 :** Solution de l'exercice 24 :
Il y a 25 élèves dans une classe. On suppose que parmi 3 quelconques d'entre eux, il y en a toujours au moins deux qui sont amis, et on sait que la relation d'amitié est réciproque. Prouver qu'il existe un élève ayant au moins 12 amis.

**Exercice 25 :** Solution de l'exercice 25 :
Le plan est colorié en deux couleurs (d'une façon quelconque).
Prouver qu'il existe un rectangle dont les sommets sont d'une même couleur.

**Exercice 26 :** Solution de l'exercice 26 :
On place 500 points sur une table rectangulaire de 2m × 1m. Prouver qu'on peut en trouver trois formant un triangle d'aire inférieure ou égale à 50 cm$^2$ .

**« Principe des tiroirs » (troisième forme) :**
Soient $k_1, k_2, \cdots, k_n$ des entiers positifs ou nuls.
Si $k_1 + k_2 + \cdots + k_n - n + 1$ objets sont placés dans $n$ tiroirs (classés dans un ordre arbitraire), alors :
le premier tiroir contiendra au moins $k_1$ objets,
ou
le deuxième tiroir contiendra au moins $k_2$ objets,
ou
...
ou
le n-ième tiroir contiendra au moins $k_n$ objets.
(remarque : en mathématiques, le « ou » est inclusif, c'est-à-dire que « A ou B » signifie « soit A, soit B, soit A et B à la fois »

Si la condition n'était pas remplie, on aurait placé au plus
$(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \cdots + (k_n - 1) = k_1 + k_2 + \cdots + k_n - n < k_1 + k_2 + \cdots + k_n - n + 1$ objets, contrairement à l'hypothèse.

**Exercice 27 :** Solution de l'exercice 27 :
On dépose au hasard dans une corbeille à fruits, des pommes, des poires et des oranges.
Combien de fruits suffit-il de déposer pour être sûr qu'il y aura dans la corbeille au moins 8 pommes ou au moins 6 poires ou au moins 9 oranges ?

**Exercice 28 :** Solution de l'exercice 28 :
On considère dix entiers quelconques, $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$.
Prouver qu'on peut choisir dix nombres $b_1, b_2, ..., b_{10} \in \{-1, 0, 1\}$ , non tous nuls, tels que $b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_{10} a_{10}$ soit divisible par 1000.

**Exercice 29 :** Solution de l'exercice 29 :
Un magicien demande à un spectateur d'écrire un nombre entier constitué de plusieurs chiffres (prenons par exemple 71046), puis de rayer un chiffre de ce nombre, autre que 0 (rayons par exemple 4).
Enfin, il lui demande de soustraire au nombre obtenu la somme des chiffres du nombre initial et d'annoncer le résultat (dans notre exemple, $7106-(7+1+0+4+6)=7088$). Le magicien, ne connaissant que ce dernier nombre, révèle alors le chiffre rayé : 4.
Comment a-t-il procédé ?

**Exercice 30 (congruence) :** Solution de l'exercice 30 :
Soit $n$ un entier naturel non nul.
On dit que deux entiers relatifs $a$ et $b$ sont **congrus modulo $n$** lorsque $a$ et $b$ ont le même reste dans leur division euclidienne par $n$.
On écrit alors $a \equiv b \mod n$, ou encore $a \equiv b\ [n]$.
On dit aussi que $a$ est congru à $b$ modulo $n$, et cette relation entre $a$ et $b$ est **symétrique**. Elle est également **réflexive**, c'est-à dire que $a \equiv a\ [n]$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$.
Si $a \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$, avec $0 \leqslant r \leqslant n-1$ et $a = q \times n + r$ (division euclidienne de $a$ par $n$, où $q$ et $r$ sont complètement déterminés par $a$ et $n$), on dit que $r$ est le reste de $a$ modulo $n$.

Prouver que :

1. Si $a \in \mathbb{Z}$, alors $a \equiv 0\ [n]$ équivaut à « $a$ est multiple de $n$ ».
2. Si $a, b \in \mathbb{Z}$, alors $a \equiv b\ [n]$ équivaut à $a-b \equiv 0\ [n]$.
3. La relation de congruence est **transitive**, c'est-à dire que pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$, si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$, alors $a \equiv c[n]$.
4. Si $a, b, a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ et si $a \equiv a_1\ [n]$ et $b \equiv b_1\ [n]$, alors $a+b \equiv a_1+b_1\ [n]$, $a \times b \equiv a_1 \times b_1\ [n]$ et $-a \equiv -a_1\ [n]$.

   On en déduit, « de proche en proche », que si, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots a_k, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{Z}$ et si $a_1 \equiv b_1\ [n], \ldots, a_k \equiv b_k\ [n]$, alors $a_1 + \cdots + a_k \equiv b_1 + \cdots + b_k\ [n]$ et $a_1 \times \cdots \times a_k \equiv b_1 \times \cdots \times b_k\ [n]$.
   En particulier, si $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b\ [n]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, alors $a^k \equiv b^k\ [n]$.

**Exemples :**

- $-a \equiv a\ [2]$
- $a$ pair $\iff a \equiv 0\ [2]$
- Si $a \equiv 0\ [2]$ et $b \equiv 0\ [2]$, alors $a+b \equiv 0\ [2]$ et $a \times b \equiv 0\ [2]$ : on retrouve le fait que la somme et le produit de deux nombres pairs sont des nombres pairs.
- $2019 \equiv 3\ [7]$ (car $2019 = 288 \times 7 + 3$), donc $2019^2 \equiv 3^2 \equiv 2\ [7]$.

**Exercice 31 :** Solution de l'exercice 31 :
Déterminer le chiffre des unités de $3^k$, suivant les valeurs de $k \in \mathbb{N}$.

**Exercice 32 :** Solution de l'exercice 32 :
Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n + 5^n + 8^n$ est divisible par 3.

**Exercice 33 :** Solution de l'exercice 33 :
Justifier les critères (bien connus) de divisibilité par 3 et par 9.

**Exercice 34 :** Solution de l'exercice 34 :
Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $10^k \equiv (-1)^k\ [11]$.
En déduire un critère de divisibilité par 11.

**Exercice 35 :** Solution de l'exercice 35 :
Le numéro d'inscription au répertoire (NIR), appelé aussi « numéro de sécurité sociale », est formé de 15 chiffres, dont les 13 premiers sont construits comme indiqué sur la figure ci-dessous :


Le deux derniers chiffres constituent la clé de contrôle.
Si $N$ est le nombre constitué des 13 premiers chiffres et $C$ la clé de contrôle (constituée de deux chiffres), on doit avoir
$C = 97 - r$, où $r$ est le reste de $N$ modulo 97.

1. En utilisant les propriétés arithmétiques des congruences, calculer à la main les restes des 13 premières puissances de 10 dans la division euclidienne par 97.
2. Vérifier les résultats avec une calculatrice (on pourra construire un programme qui contourne les limitations de la calculatrice).
3. Comment calculer la clef du NIR ci-dessus à partir des 13 premiers chiffres, avec une calculatrice qui n'effectue pas de calculs exacts sur des nombres à 13 chiffres ?

   Que remarque-t-on ?
4. Si on écrit $N = a \times 10^6 + b$, prouver que $C \equiv 97 - (27a + b)\ [97]$, ce qui ramène le calcul de $C$ à celui du reste du nombre positif (à 8 chiffres) $27a + b$ modulo 97.

   Retrouver alors de cette manière la clé calculée à la question précédente.

**Exercice 36 :** Solution de l'exercice 36 :
Imaginons que l'on trouve une carte vitale dont le nom du propriétaire et les deux derniers chiffres sont effacés.
Les 13 premiers chiffres sont 2 54 12 77 523 017.

1. Que sait-on de son propriétaire ?
2. Restaurer les deux derniers chiffres.
3. Si on inverse les 12e et 13e chiffres, l'erreur sera-t-elle détectée ?
4. Si l'on change le « code commune » en 620, l'erreur sera-t-elle détectée ?

**Exercice 37 :** Solution de l'exercice 37 :
Le but de cet exercice est de prouver que pour tout entier naturel n, l'entier $N = 2^{2^{6n+2}} + 3$ est divisible par 19.

1. Vérifier cette affirmation pour $n = 0$.
2. Calculer le reste modulo 9 de $2^6$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier naturel k tel que $2^{6n} = 9k+1$.
3. Calculer le reste modulo 19 de $2^{18}$.
4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $N = 2^{2^{6n+2}} + 3$ est divisible par 19.

**Exercice 38 : Calcul du jour de la semaine correspondant à une date donnée** Solution de l'exercice 38 :

On dira qu'une année est divisible par un entier $k$ si sa valeur (ou millésime : le nombre écrit en base dix représentant l'année) est divisible par $k$.
On rappelle que dans le calendrier grégorien (le calendrier utilisé actuellement) une année est bissextile si et seulement si elle est :

- divisible par 4 et non divisible par 100
  ou
- divisible par 400.

Par exemple :

- l'année 1900 n'est pas bissextile (1900 est multiple de 4, mais aussi de 100 sans être multiple de 400).
- Les années 1904, 1908, 1996 ($= 499 \times 4$), 2000 ($= 4 \times 500 = 400 \times 5$), 2004, 2008, 2012, 2016, 2020 sont bissextiles.

Le jour de la semaine correspondant au premier janvier 1900 était un lundi.

1. Quel jour de la semaine correspondait au 23/01/1900 ? au 31/01/1900 ?
2. Comment détermine t-on le jour de la semaine correspondant au 01/02/1900 ? au 01/03/1900 ? au 01/04/1900 ?

**Exercice 39 :** Solution de l'exercice 39 :
On rappelle que si $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, la division euclidienne de $a$ par $b$ s'écrit $a = bq + r$, avec $q, r \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r \leqslant b-1$.
Par ailleurs, on appelle partie entière d'un réel $x$ et on note $\mathrm{E}(x)$ le plus grand entier inférieur ou égal à $x$.
Ainsi, $\mathrm{E}(x)$ est l'unique entier vérifiant

$$\mathrm{E}(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1$$

1. Prouver que $q = \mathrm{E}\left(\frac{a}{b}\right)$
2. Prouver qu'entre l'année 1900 et l'année 2300 (non incluses), il y a
   $\mathrm{E}\left(\dfrac{2299-1900}{4}\right) = \mathrm{E}\left(\dfrac{399}{4}\right)$ années divisibles par 4.
3. Combien y a-t-il d'années divisibles par 100 entre l'année 1900 et l'année 2300 (non incluses) ?
4. Combien y a-t-il d'années divisibles par 400 entre l'année 1900 et l'année 2300 (non incluses) ?
5. Combien y a-t-il d'années bissextiles entre l'année 1900 et l'année 2300 (non incluses) ?
6. On rappelle que le 01/01/1900 était un lundi.
   Quel jour de la semaine correspondra au 01/01/2300 ? au 14/07/2300 ?

**Exercice 40 :** Solution de l'exercice 40 :
Pour simplifier, **on compte les années à partir de l'année** 1**, et en utilisant le calendrier grégorien**, bien que celui-ci fût créé en 1582.

1. Combien y a-t-il alors d'années bissextiles entre l'année 1 et l'année $A$ (non incluse), pour $A \geqslant 1$ ? On notera $B$ ce nombre, que l'on exprimera en fonction de $A$ et à l'aide de la fonction « partie entière » E.
2. Prouver que le nombre $P$ de jours dans les années qui précèdent l'année A est tel que $P \equiv B + A - 1$ [7]
3. On note $J/M/A$ une date, avec $J$ entre 1 et 31, $M$ entre 1 et 12 et $A$ une année (avec $A > 1582$, car le calendrier grégorien a été appliqué en France au cours de l'année 1582).

   **Supposons d'abord l'année $A$ non bissextile.**

   Si le 01/01/$A$ est un lundi, par exemple, le 28 on aura fait 4 semaines complètes, mais il restera trois jours avant le 01/02/$A$, qui décaleront d'autant le jour de la semaine correspondant au 01/02/$A$, qui sera donc un jeudi (lundi + 3 jours).

   Si le 01/01/$A$ est un mardi, le 01/02/$A$ sera un vendredi (mardi + 3 jours), etc.

   Tous les « jours de semaine » du mois de février sont décalés de 3 jours, jusqu'au 28 février, et ceux du mois de mars seront décalés de 3 jours.

   Tous les jours du mois d'avril seront décalés de 3 jours supplémentaires, c'est-à-dire de 6 jours.

   Et ainsi de suite pour les mois suivants, les décalages s'accumulant, mais pouvant évidemment être calculés modulo 7.

   Compléter le tableau suivant, donnant le décalage considéré précédemment :

| Mois | Janv | Février | Mars | Avril | Mai | Juin | Juillet | Août | Sept | Oct | Nov | Déc |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D \equiv \cdots$ [7] | 0 | 3 | | | | | | | | | | |

**Si l'année $A$ est bissextile**, le décalage est nul en janvier et vaut 3 en février, mais augmente de 1 pour les mois suivants par rapport au cas d'une année non bissextile.

Le nombre $N$ de jours du 01/01/01 au $J/M/A$ (ces deux jours inclus) est donc tel que $N \equiv B+A-1+D+J+C$ [7], où $C=1$ si $A$ est bissextile **et** si $M \geqslant 3$ , et $C=0$ sinon.

**4.** Sachant que le 01/01/2019 était un mardi, vérifier que les nombres $N$ associés à mardi sont tels que $N \equiv 2$ [7]. Compléter alors le tableau suivant :

| Jour de la semaine | Lundi | Mardi | Mercredi | Jeudi | Vendredi | Samedi | Dimanche |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N \equiv \cdots$ [7] | | | | | | | |

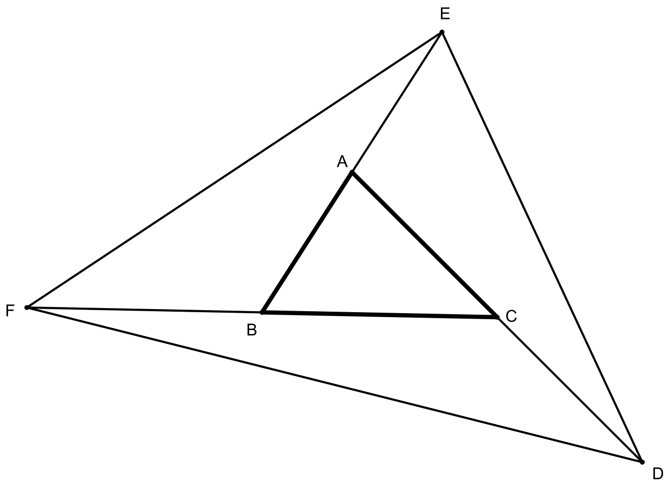
**Exercice 41 :** Solution de l'exercice 41 :
Construire un programme à la calculatrice ou en python qui donne le jour de la semaine correspondant à une date donnée (postérieure à l'année 1582).

## Un peu de géométrie

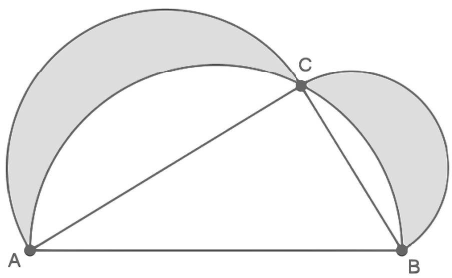
**Exercice 42 :** Solution de l'exercice 42 :
Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle, D est le symétrique de A par rapport à C, E est le symétrique de B par rapport à A, F est le symétrique de C par rapport à B .

**1.** Exprimer l'aire du triangle DEF par rapport à celle du triangle ABC.

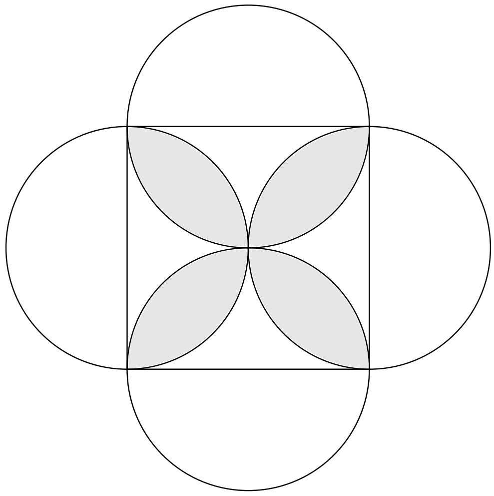
**2.** Prouver que la droite (AB) coupe le segment [FD] en E' tel que FE' $= \frac{1}{3}$FD, et, de façon analogue , que (BC) et (CA) coupent respectivement les segments [DE] et [EF] en F' et D' tels que DF' $= \frac{1}{3}$DE et ED' $= \frac{1}{3}$EF.




**Exercice 43 :** Solution de l'exercice 43 :
Sur la figure ci-dessous, on a tracé un triangle ABC rectangle en A, ainsi que des demi-cercles de diamètres respectifs [AB], [AC] et [BC].
Cela fait apparaître deux lunules (grisées), dont on demande de calculer l'aire totale en fonction de l'aire du rectangle.

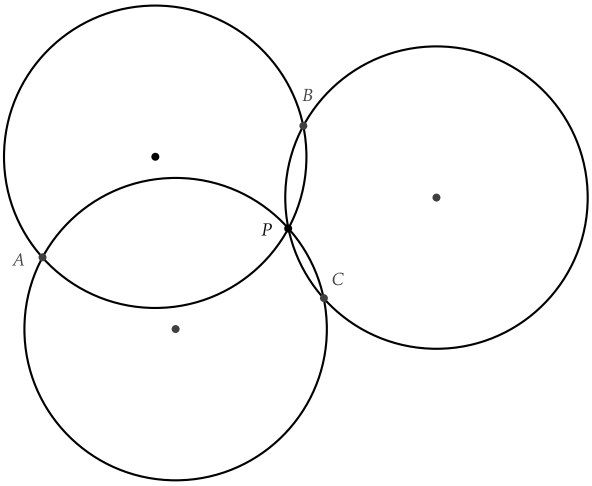


**Exercice 44 :** Solution de l'exercice 44 :
La rosace à quatre feuilles ci-dessous est obtenue en traçant quatre cercles de rayon 10 cm, et de centres les milieux des côtés du carré.
Quelle est l'aire de la rosace ?

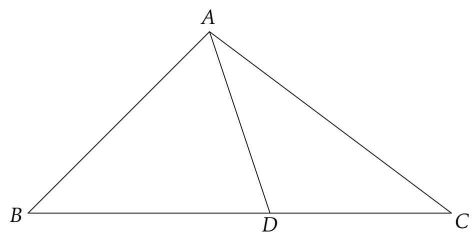


**Exercice 45 :** Solution de l'exercice 45 :

Trois cercles de même rayon ont un point commun $P$, et se recoupent deux à deux en $A$, $B$, $C$.
Que peut-on dire du cercle passant par les points $A$, $B$, $C$ ?.

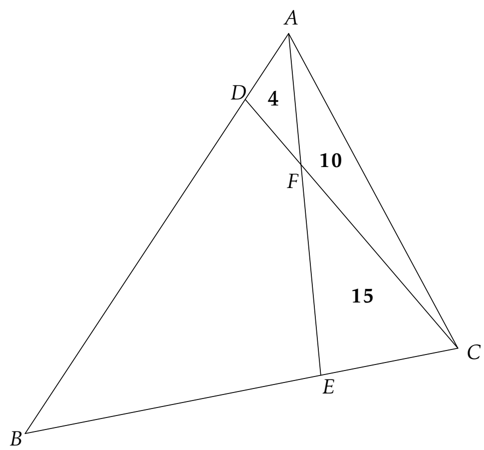



**Exercice 46 :** Solution de l'exercice 46 :
En considérant la figure ci-contre, et en notant $\mathcal{A}(ABD)$ et $\mathcal{A}(ADC)$ les aires respectives des triangles $ABD$ et $ADC$, comparer les rapports $\dfrac{\mathcal{A}(ABD)}{\mathcal{A}(ADC)}$ et $\dfrac{BD}{DC}$.

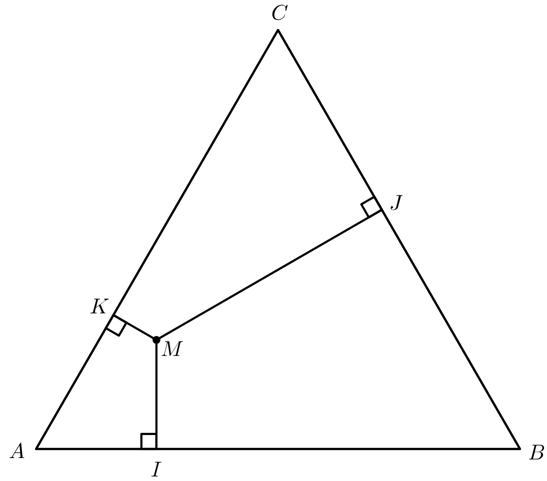



**Exercice 47 :** Solution de l'exercice 47 :

Dans le triangle ci-contre, on connaît les aires des triangles $ADF$, $ACF$ et $CEF$, égales respectivement à 4, 10 et 15.
Déterminer l'aire du triangle $ABC$.

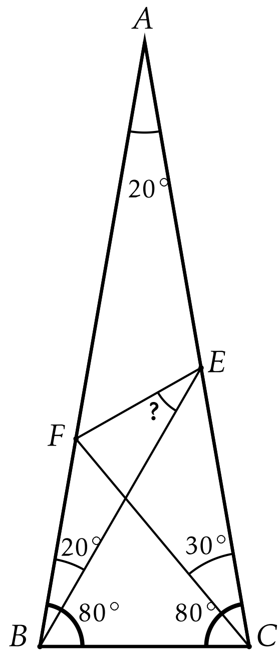


**Exercice 48 :** Solution de l'exercice 48 :




On considère un triangle équilatéral $ABC$, dont la longueur des côtés vaut $a$, et un point $M$ à l'intérieur du triangle.
On note $I$, $J$, $K$ les projetés orthogonaux de $M$ sur les segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.
Calculer la somme $MI + MJ + MK$ en fonction de $a$, et constater que cette somme ne dépend pas de la position de $M$ à l'intérieur du triangle.

**Exercice 49 :** Solution de l'exercice 49 :

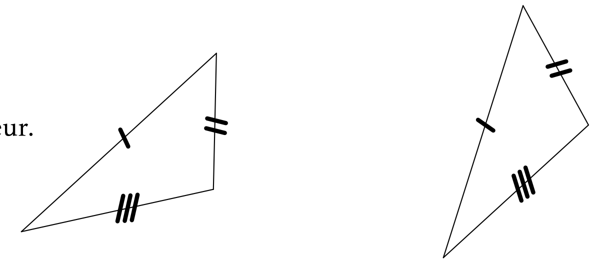



Le triangle $ABC$ est isocèle en $A$, et on a :
$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 80°$, $\widehat{BAC} = 20°$
$\widehat{ACF} = 30°$, $\widehat{ABE} = 20°$
Calculer $\widehat{BEF}$.

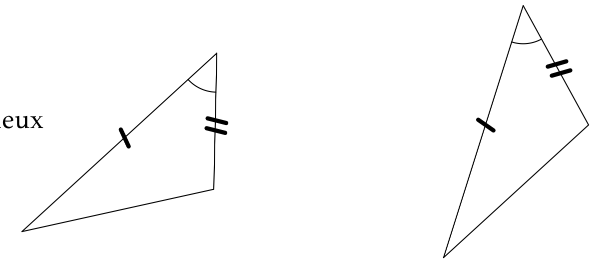
**Cas d'égalité des triangles :**

Soient deux triangles.
Les conditions suivantes sont équivalentes (et on dit alors que les deux triangles sont isométriques, ou « superposables » ou encore « égaux » ) :

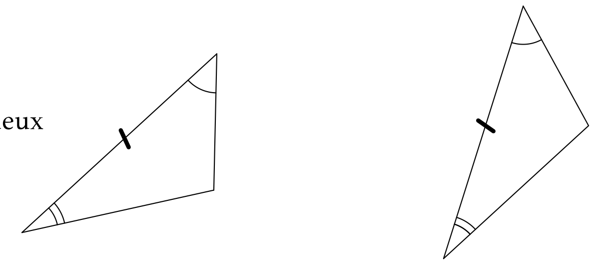
• Les deux triangles ont leurs côtés deux à deux de même longueur.



• Les deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de mêmes longueurs.

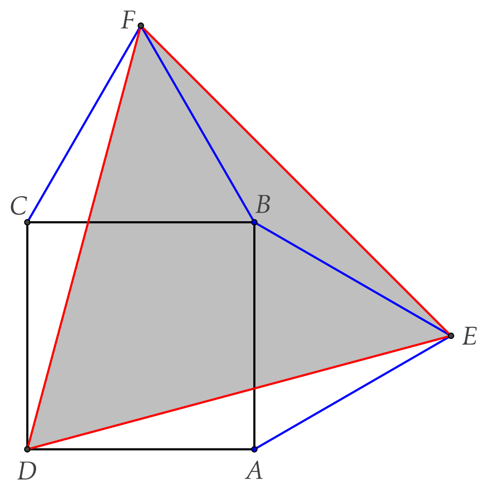


• Les deux triangles ont un côté de même longueur compris entre deux angles de mêmes mesures.



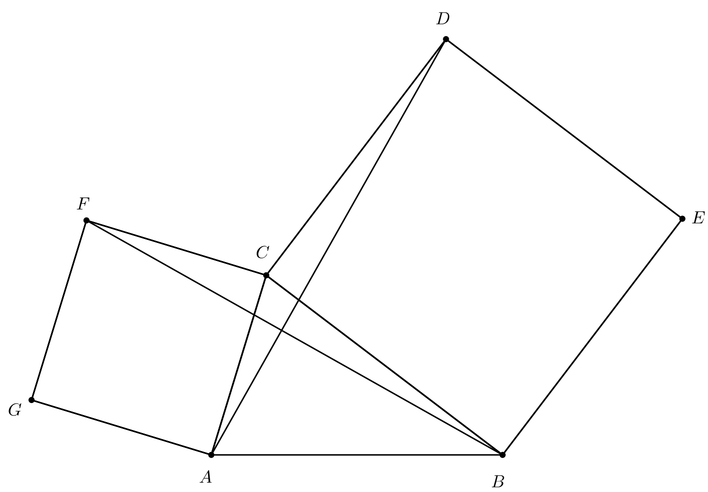
**Exercice 50 :** Solution de l'exercice 50 :

Sur deux côtés consécutifs d'un carré $ABCD$, on construit extérieurement à celui-ci deux triangles équilatéraux $ABE$ et $BCF$. Prouver que le triangle $DEF$ est équilatéral.

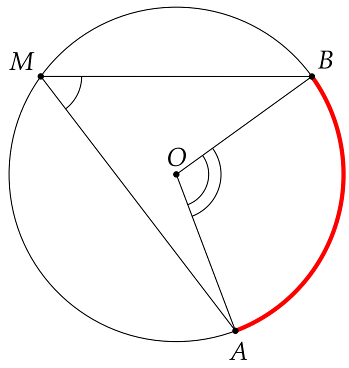


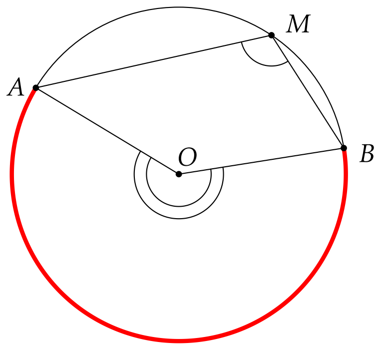

**Exercice 51 :** Solution de l'exercice 51 :

Sur deux côtés du triangle $ABC$, on a construit deux carrés.
Prouver que les segments $[BF]$ et $[AD]$ ont la même longueur et sont perpendiculaires.



**Exercice 52 :** (Théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre) : Solution de l'exercice 52 :



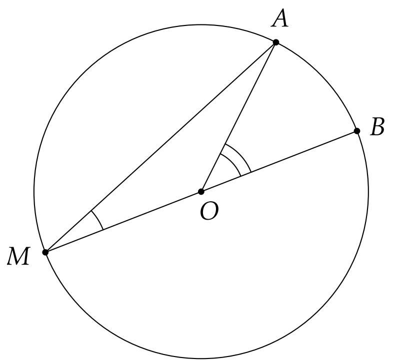




$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$ $\qquad$ $\overset{\smile}{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$

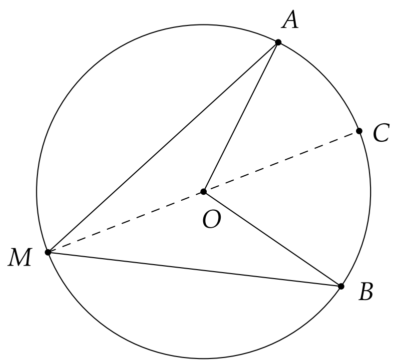
$\widehat{AOB}$ angle saillant (entre 0° et 180°) $\qquad$ ($\overset{\smile}{AOB}$ angle rentrant (entre 180° et 360°)

Il en résulte que $\widehat{AMB}$ ne dépend pas de la position du point $M$ sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ (dès que l'on a choisi le "petit" ou le "grand" arc de cercle).

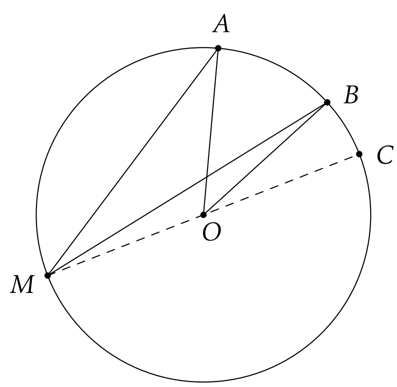
Prouver ce théorème, en considérant d'abord les trois cas ci-dessous, où $\widehat{AMB}$ est aigu :




cas 1

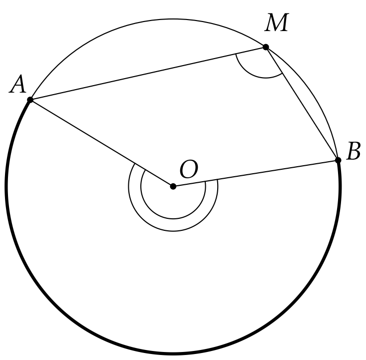


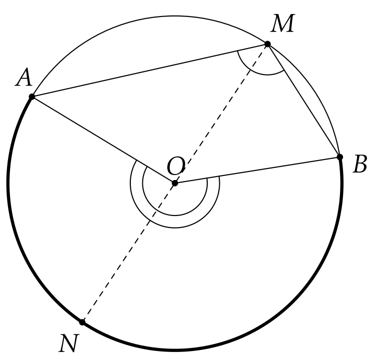

cas 2



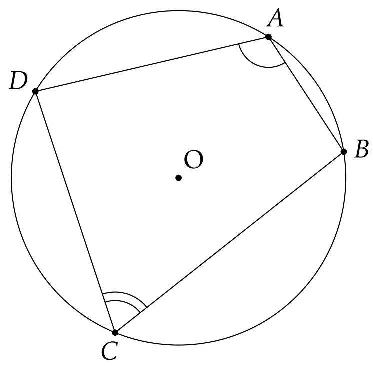

cas 3

Puis considérer enfin le cas où $\widehat{AMB}$ est obtus :

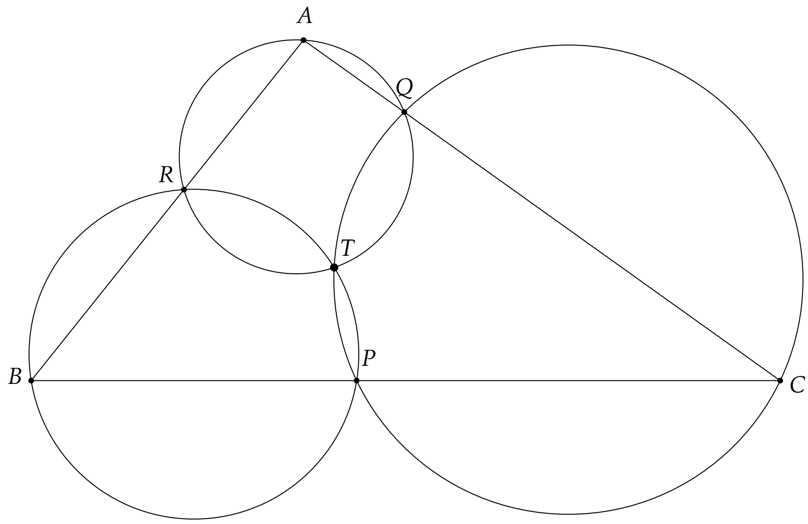


**Exercice 53 (théorème de cocyclicité) :** Solution de l'exercice 53 :
Si $ABCD$ est un quadrilatère convexe, les points $A, B, C, D$ sont cocycliques si et seulement si $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180°$ :




**Exercice 54 (théorème du pivot) :** Solution de l'exercice 54 :
Soient $ABC$ un triangle et $P, Q, R$ des points placés sur les côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.
On trace les cercles circonscrits aux triangles $ARQ$, $BPR$ et $CQP$.
Montrer que ces trois cercles passent par un même point.

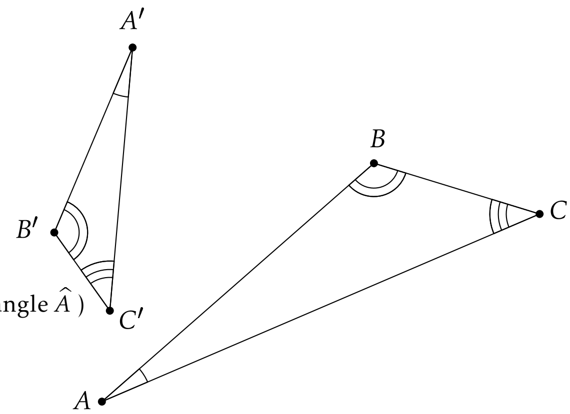



**Triangles semblables**

**Théorème :** Soient deux triangles $ABC$ et $A'B'C'$.
Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

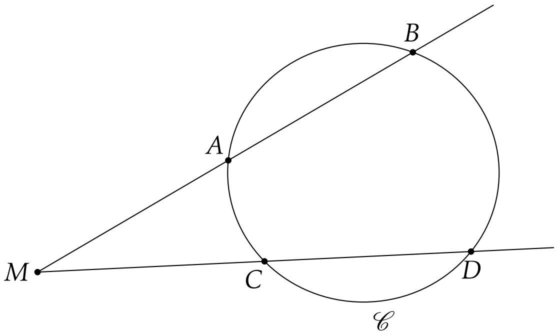
1. $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$
2. $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$
3. $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ (les quotients concernent les côtés adjacents à l'angle $\widehat{A}$ )

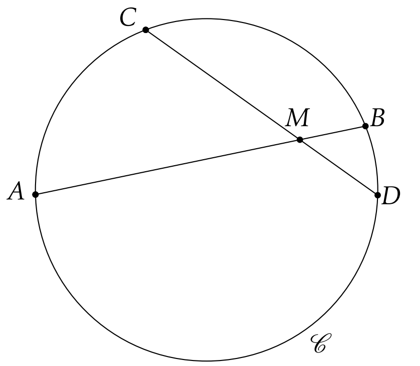
On dit alors que les deux triangles sont semblables.



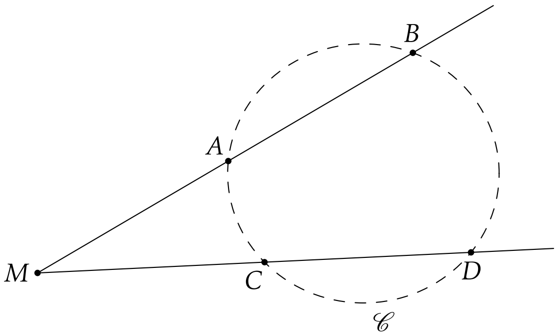
**Exercice 55 :** Solution de l'exercice 55 :

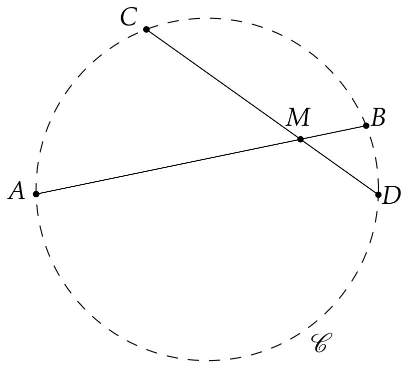
Dans chacun des cas suivants, où $A, B, C, D$ sont sur un cercle $\mathscr{C}$, prouver l'égalité $MA \times MB = MC \times MD$.



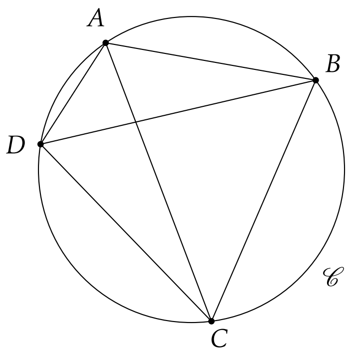

Étudier la réciproque : dans chacun des cas suivants, si $A, B, C, D$ sont tels que $MA \times MB = MC \times MD$, alors ces points appartiennent à un même cercle.



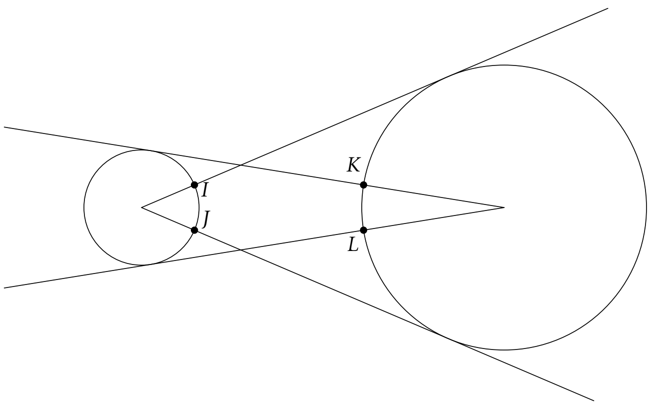

**Exercice 56 (Théorème de Ptolémée) :** Solution de l'exercice 56 :

Si $A, B, C, D$ sont sur un même cercle (et dans cet ordre : voir figure), alors $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.




**Exercice 57 :** Solution de l'exercice 57 :

Étant donnés deux cercles, on trace les tangentes à chacun, issues du centre de l'autre (figure ci-dessous).
Prouver que les cordes $[IJ]$ et $[KL]$ ont la même longueur.



# Solutions

**Solution de l'exercice 1 :** Enoncé
Le nombre de verres à l'endroit est impair.
En retournant deux verres en même temps, (trois cas possibles pour leur position initiale : un, deux ou trois verres à l'endroit), on ne change pas la parité du nombre de verres à l'endroit : la parité du nombre de verres à l'endroit est invariante lors de retournements.
On ne pourra donc pas avoir tous les verres (en nombre pair, ici) à l'endroit.

**Solution de l'exercice 2 :** Enoncé
Pour répondre à cette question, on utilise un invariant de parité : on constate que lorsque l'on appuie sur un interrupteur, la parité du nombre d'ampoules allumées ne change pas. En effet, s'il y a sur la ligne ou la colonne affectée par l'opération, $n$ ampoules allumées et $6-n$ ampoules éteintes, il y aura après l'opération $6-n$ ampoules allumées et $n$ ampoules éteintes ; et on remarque alors que $n$ et $6-n$ ont la même parité.
Donc avec une ampoule allumée au départ, on ne pourra jamais arriver à allumer toutes les ampoules (en nombre pair).

**Solution de l'exercice 3 :** Enoncé
Supposons que les arbres soient alternés entre des cerisiers et des pommiers. On va compter le nombre de corbeaux posés sur des cerisiers. Au début il y a 11 corbeaux sur des cerisiers, et à la fin soit 0, soit 22 selon l'espèce de l'arbre sur lequel tous les corbeaux sont posés. Mais à chaque étape, on peut vérifier que le nombre de corbeaux sur des cerisiers reste le même, augmente de 2 ou diminue de 2. En particulier il ne change pas de parité. On ne peut donc pas passer de 11 à 22 ou 0.

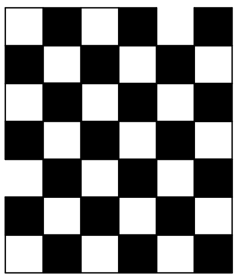
**Solution de l'exercice 4 :** Enoncé
L'invariant est ici la parité du nombre de morceaux. À chaque étape, le nombre total de morceaux augmente de 2. Comme il vaut 1 au début, on ne peut atteindre 100.

**Solution de l'exercice 5 :** Enoncé
Un invariant est ici la parité du nombre de nombres impairs de la liste. Si les nombres $x$ et $y$ choisis sont tous les deux impairs, le nombre de nombres impairs diminue de 2. Dans les autres, cas, on vérifie qu'il ne change pas. Donc la parité du nombre de nombres impairs de la liste est conservée. Il y a initialement 1007 nombres impairs écrits, donc le dernier nombre ne peut pas être 2.

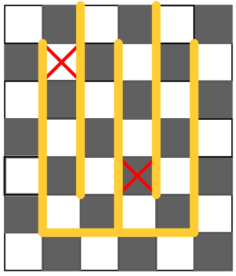
Remarque : on voit qu'il y a 1007 nombres impairs dans la liste en réécrivant cette liste sous la forme
$2\times\boxed{1}-1,\ 2\times\boxed{2}-1,\ 2\times\boxed{3}-1,\cdots,\ 2\times\boxed{1007}-1$. Il suffit alors de repérer les nombres encadrés...

**Solution de l'exercice 6 :** Enoncé
Le magicien repère la parité du nombre de pièces côté « pile » (par exemple, mais on a intérêt à repérer la catégorie la moins nombreuse), et retient la parité du nombre de retournements de pièces.
Une fois retourné face à la table, il s'attend alors à ce que la parité du nombre de pièces côté « pile » soit :
- inchangée si le nombre de retournements est pair
- changée si le nombre de retournements est impair
Il repère alors la parité du nombre de pièces côté « pile » : si c'est la parité attendue, la pièce cachée est du côté « pile », sinon, elle est du côté « face ».

**Solution de l'exercice 7 :** Enoncé
Si on colorie le quadrillage comme dans la figure ci-dessous, on voit que chaque « domino » , constitué de deux carreaux, doit recouvrir exactement un carreau noir et un carreau blanc. Donc, si l'on recouvre exactement la quadrillage, on aura recouvert autant de carreaux noirs que de carreaux blancs.
C'est impossible, car le quadrillage présente deux carreaux blancs de moins que de noirs.



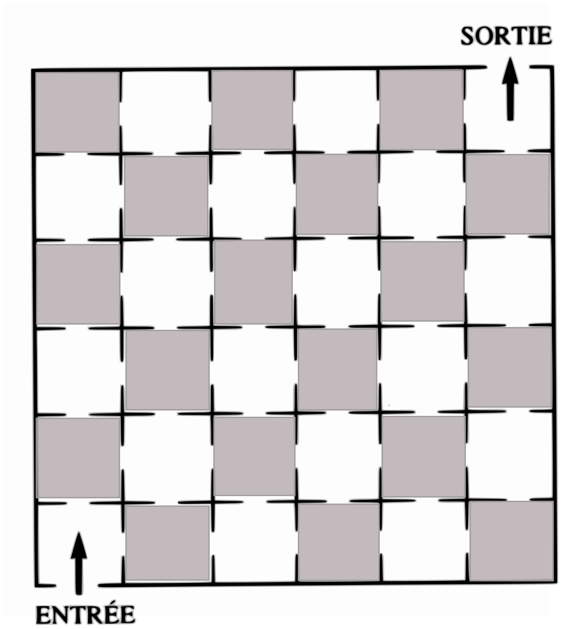
**Solution de l'exercice 8 :** Enoncé



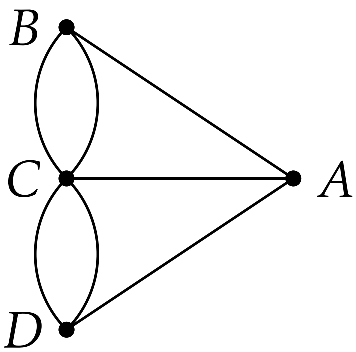
On peut construire, en plaçant bout à bout des dominos et en passant entre les lignes colorées, un « serpentin » fermé recouvrant le damier .
En enlevant deux cases de couleurs différentes (quelles qu'elles soient), on ouvre le « serpentin », qui recouvre encore autant de cases de chaque couleur, et on peut donc encore placer des dominos qui recouvriront le damier privé de deux cases de couleurs différentes.

**Solution de l'exercice 9 :** Enoncé

En considérant le coloriage ci-contre, on s'aperçoit qu'à chaque fois que l'on franchit une porte intérieure (autre que l'entrée ou la sortie), on passe d'une couleur à l'autre.
Comme on doit passer par un nombre pair de pièces (entrée et sortie comprises, il y a $6 \times 6 = 36$ pièces), on devra passer alternativement du blanc au gris un nombre pair de fois, et donc terminer par du gris.
Or la sortie est blanche, donc le parcours envisagé est impossible.




**Solution de l'exercice 10 :** Enoncé




Dans le graphe ci-dessus, on a représenté les îles $A$ et $C$ ainsi que les rives $B$ et $D$ chacune par un point (un sommet du graphe), et les ponts par des lignes (les arêtes du graphe).
On s'aperçoit que si l'on part d'un point pour arriver à un autre en parcourant une seule fois chaque arête, il faut nécessairement que chaque point « intermédiaire », qui n'est ni le départ, ni l'arrivée, soit le point de concours d'un nombre pair d'arêtes (une pour arriver à ce point, une pour en repartir, etc). Seuls le point de départ (on peut en partir sans y revenir) et le point d'arrivée (on peut y arriver sans en repartir) peuvent échapper à cette règle.
Or tous les points de ce graphe sont points de concours d'un nombre impair d'arêtes. On ne peut donc pas réaliser le trajet escompté. De plus, pour qu'un tel trajet ramène au point de départ, il faudrait que tous les sommets du graphe soient points de concours d'un nombre pair d'arêtes.

**Solution de l'exercice 11 :** Enoncé
Numérotons les N personnes, et notons $n_k$ le nombre de mains serrées par la $k^e$ personne.
Alors, si m est le nombre de poignées de mains échangées, on $n_1 + n_2 + \cdots + n_N = 2m$ (dans cette somme, chaque poignée de mains entre les personnes $i$ et $j$ ($i \neq j$) est comptée exactement deux fois : une fois dans $n_i$, et une fois dans $n_j$)
Cette somme étant paire, elle contient un nombre pair de nombres impairs.

**Solution de l'exercice 12 :** Enoncé
Supposons $\sqrt{2}$ rationnel, et écrivons-le sous la forme $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, où $a$ et $b$ sont deux entiers relatifs premiers entre eux.
Alors, en élevant au carré les deux membres de cette égalité, on obtient $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, d'où $a^2 = 2b^2$
$2b^2$ étant pair, il en est de même pour $a^2$. Mais alors $a$ est pair (on sait que le carré d'un nombre impair est impair), ce qui contredit le fait que $a$ et $b$ sont premiers entre eux.
On a donc prouvé, par un « raisonnement par l'absurde », que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel (on dit qu'il est irrationnel).

**Solution de l'exercice 13 :** Enoncé
Il suffit d'en extraire trois, car parmi ces trois billes, il y en a forcément deux de la même couleur (ici, les billes représentent les objets et les couleurs les tiroirs)

**Solution de l'exercice 14 :** Enoncé
Il suffit de construire un triangle équilatéral de côté $x$ : nécessairement deux des sommets de ce triangle équilatéral sont de même couleur, et répondent positivement à la question.

**Solution de l'exercice 15 :** Enoncé
Raisonnons par l'absurde.
Si la propriété à démontrer est fausse, alors pour chacune des couleurs rouge et bleu, on peut trouver un réel ( $x$ pour rouge et $y$ pour bleu) de telle sorte que deux points rouges ne soient jamais distants de $x$ , ni deux points bleus distants de $y$.
Supposons $x \geqslant y$ par exemple, le problème étant symétrique pour les deux couleurs. Si tous les points du plan étaient bleus, on aurait deux points bleus distants de $y$ , ce qui contredirait la négation de notre conclusion. On supposera donc qu'au moins un point A est rouge, et on construit un triangle $ABC$ avec $AB = AC = x$ , $BC = y$, ce qui est possible car $x \geqslant y$.
Si l'un des points $B$ ou $C$ est rouge, on aura deux points rouges distants de $x$.
Si $B$ et $C$ sont tous deux bleus, on aura deux points bleus distants de $y$.
Dans tous les cas, la négation de la propriété est contradictoire, donc la propriété (que l'on doit démontrer) est vraie.

**Solution de l'exercice 16 :** Enoncé
À n'importe quel moment, chaque personne a serré un nombre de mains entre 0 et 28. Comme il ne peut pas y avoir à la fois quelqu'un n'ayant serré aucune main et quelqu'un ayant serré toutes les mains, le nombre de mains serrées par chaque personne est pris parmi 28 valeurs, et donc, d'après le principe des tiroirs, il y a deux personnes qui ont serré exactement le même nombre de mains.
Cela se généralise évidemment à tout nombre $N \geqslant 2$.

**Solution de l'exercice 17 :** Enoncé
Choisissons un repère adapté à la grille. Un point est sur la grille si et seulement si ses coordonnées $(x,y)$ sont toutes les deux entières. Soient A et B de coordonnées respectives $(x_1,y_1)$ et $(x_2,y_2)$ ; le milieu du segment $[AB]$ sera le point de coordonnées $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Le milieu sera sur la grille si et seulement si ses coordonnées sont entières, c'est-à-dire si et seulement si $x_1$ et $x_2$ sont de même parité, et $y_1$ et $y_2$ aussi. Les parités des coordonnées d'un point de la grille peuvent être de quatre types de parité différents : (paire, paire) ; (paire, impaire) ; (impaire, paire) et (impaire, impaire). Comme on a 5 points pour 4 types, au moins deux points ont le même type de parité, et leur milieu est sur la grille.

**Solution de l'exercice 18 :** Enoncé
On doit répartir $25 = 2 \times 12 + 1$ dates d'anniversaire dans 12 mois, donc au moins 3 dates d'anniversaire sont dans le même mois.

**Solution de l'exercice 19 :** Enoncé
Pour appliquer le principe des tiroirs et prouver que l'un (au moins) des tiroirs contient au moins 3 points, il suffit, puisque $51 = 2 \times 25 + 1$, de considérer 25 tiroirs. Or il est facile de partager le carré en 25 carrés de côté $\frac{1}{5}$. Pour chacun des côtés communs à deux carrés, il faut convenir auquel des carrés on le rattache, de sorte qu'on ait une réelle partition du carré en sous-ensembles disjoints. Chaque point appartient alors à un petit carré, donc il existe au moins un petit carré contenant au moins trois points. Il suffit maintenant de remarquer qu'il existe un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ contenant ce carré, car la diagonale du carré, $\frac{\sqrt{2}}{5}$ est inférieure au diamètre du cercle $\frac{2}{7}$ .

**Solution de l'exercice 20 :** Enoncé
On suppose d'abord qu'une des personnes connaît tout le monde. Dans ce cas, tout le monde la connaît, donc personne n'a 0 connaissance.
Les nombres d'amis possibles pour une personne donnée sont donc les entiers de 1 à 2017, soit 2017 possibilités.

Comme il y a 2018 personnes, par le principe des tiroirs, deux personnes ont le même nombre de connaissances.
De même, si personne n'a 2017 connaissances (c'est-à-dire si personne ne connaît tout le monde), les nombres d'amis possibles pour une personne donnée sont les entiers de 0 à 2016, ce qui permet aussi de conclure.
Cela se généralise évidemment à $N$ personnes ($N \geqslant 2$).

**Solution de l'exercice 21 :** Enoncé
On remarque que chaque étape du jeu consiste à enlever un jeton et rajouter une pile. Donc la quantité « nombre de jetons + nombre de piles » ne change jamais. Au départ on a 2018 jetons et une pile, ce qui donne 2019, et si arrivait à $n$ piles de 3 jetons (donc 3 n jetons), on aurait une somme « nombre de jetons + nombre de piles » égale à $4n$ . Mais 2019 n'est pas divisible par 4, donc c'est impossible.

**Solution de l'exercice 22 :** Enoncé
Répartissons les chiens selon le reste de la division euclidienne par 11 du nombre de leurs taches (il y a 11 restes possibles, de 0 à 10). S'il y a au moins un chien dans chaque groupe, alors il suffit de prendre un chien de chaque groupe, car les nombres de tâches seront respectivement $11k_0 + 0$, $11k_0 + 1$, $\cdots$, $11k_{10} + 10$, et leur somme sera $11(k_0 + k_1 + \cdots + k_{10}) + 0 + 1 + 2 + \cdots + 10 = 11(k_0 + k_1 + \cdots + k_{10}) + 55$, qui est un multiple de 11.
S'il y a un groupe vide, alors il y a au moins un des 10 autres groupes contenant 11 chiens (principe des tiroirs : $101 = 10 \times 10 + 1$), et le nombre de taches est alors encore un multiple de 11 (c'est $11(k_1 + k_2 + \cdots + k_{11}) + 11r$, si les chiens de ce groupe ont respectivement pour nombres de tâches $11k_1 + r$, $11k_2 + r$, $\cdots$, $11k_{11} + r$).

**Solution de l'exercice 23 :** Enoncé
Ici, les tiroirs seront les restes de la division par $n$, et les objets, des nombres dont la différence s'écrive seulement avec des 0 et des 1.
Plus précisément, choisissons pour objets les nombres : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111, \cdots, a_n = 11\cdots1$ qui s'écrivent avec $0, 1, 2, \cdots, n$ chiffres 1. Il y a $n+1$ objets, et les restes de leur division par $n$ peuvent prendre $n$ valeurs distinctes : $0, 1, \cdots, n-1$. Donc deux de ces nombres auront même reste dans la division par $n$ : $a_i = nq_i + r$ et $a_j = nq_j + r$ , et leur différence (en supposant $i > j$ ) : $a_i - a_j = n(q_i - q_j)$ sera divisible par $n$. Or cette différence s'écrira avec $(i-j)$ fois le chiffre 1 suivis de $j$ fois le chiffre 0, ce qui est conforme à l'énoncé.

Programme en Python :

```
k=0
a = 2019 # nombre à choisir
while True:
        k=k+1
        n=a*k
        if {c for c in str(n)} == {'0','1'}: # on extrait l'ensemble des chiffres de n,
                                              # que l'on compare à l'ensemble {'0','1'}
            break # si les ensembles sont égaux (mêmes chiffres) on stoppe la boucle,
                  # et on affiche le résultat obtenu:
print(a,"*",int(n/a),"=",n)
```

**Solution de l'exercice 24 :** Enoncé

Si tout le monde est ami avec tout le monde, on a trouvé...
Sinon, soient $A$ et $B$ des élèves qui ne sont pas amis. Alors chacun des 23 autres élèves est ami avec $A$ ou $B$. Par le principe des tiroirs, au moins l'un des deux a 12 amis (puisque $23 = 11 \times 2 + 1$).

**Solution de l'exercice 25 :** Enoncé
Appelons les deux couleurs rouge et bleu. On considère une grille rectangulaire $7 \times 3$ (disons que les colonnes ont 7 points et les lignes ont 3 points). Parmi les $7 = 2 \times 3 + 1$ points de la première colonne, au moins 4 sont d'une même couleur, disons bleu. On ne considère plus que la grille $4 \times 3$ obtenue en supprimant les lignes ne passant pas par les 4 points précédents. Si deux points de la deuxième colonne sont bleus alors on a gagné. Sinon au moins trois points de la deuxième colonne sont rouges. Alors comme au moins deux points de la troisième colonne sont de la même couleur, on a un rectangle rouge ou bleu.

**Solution de l'exercice 26 :** Enoncé
Pour appliquer le principe des tiroirs, donc trouver trois points dans le même tiroir, on va diviser le rectangle en moins de $\frac{500}{2} = 250$ tiroirs, par exemple, 200 carrés de 10 cm $\times$ 10 cm. De fait, il y aura un carré de 100 cm$^2$ qui contiendra 3 points (on a $500 > 401 = 2 \times 200 + 1$), mais cela prouve-t-il que l'aire du triangle en question est inférieure à 50 cm$^2$ ? Il faut compléter la preuve par un raisonnement géométrique. Un triangle intérieur à un rectangle a pour aire au maximum la moitié de l'aire du rectangle. Pour le prouver, on peut découper le rectangle en trois rectangles contenant chacun un morceau du triangle, de sorte qu'il soit évident que l'aire de chaque morceau de triangle est au plus égale à la moitié de l'aire du rectangle qui le contient. Donc si l'on trouve 3 points intérieurs à un carré d'aire 100 cm$^2$ , l'aire du triangle qu'ils forment est bien inférieure à 50 cm$^2$ (si les points ne sont pas alignés, sinon on peut considérer qu'ils forment un triangle d'aire nulle).
Si un triangle est intérieur (au sens large : bords compris) à un rectangle, les parallèles à l'un des côtés du rectangle passant par les sommets du triangle ne peuvent contenir que 0, 1 ou 2 sommet(s) de ce triangle : on peut donc se ramener à la situation de l'une des figures ci-dessous.

Dans la figure 1, la partie du triangle intérieur au rectangle MNQP a une aire inférieure ou égale à la moitié de l'aire de ce rectangle (car la base du triangle est BD $\leqslant$ QN et sa hauteur est MN). De même pour la partie du triangle intérieur au rectangle NORQ.
Donc l'aire du triangle est bien inférieure ou égale à la moitié de l'aire du grand rectangle.
Même chose pour la figure 2.

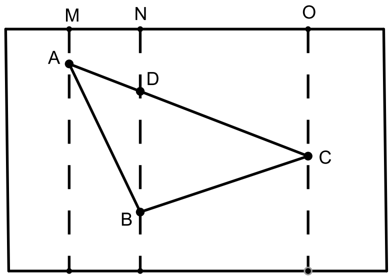


figure 1

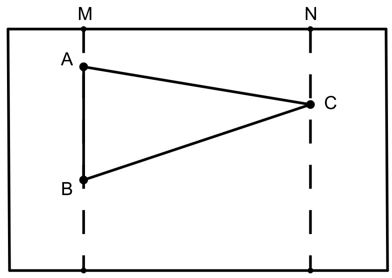


figure 2

**Solution de l'exercice 27 :** Enoncé
$8+6+9-3+1=21$, par le principe énoncé ci-dessus.

**Solution de l'exercice 28 :** Enoncé
Considérons toutes les sommes possibles $c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_{10}a_{10}$ où $c_1, c_2, ..., c_{10}$ sont choisis dans $\{0,1\}$.
Il y en a $2^{10}=1024$, car chaque $c_i$ peut être choisi indépendamment parmi deux valeurs. Les restes des divisions par 1000 de ces sommes peuvent prendre 1000 valeurs distinctes (les trois derniers chiffres du nombre s'il est positif), de 0 à 999. Donc parmi ces 1024 sommes, nécessairement deux au moins auront même reste de la division par 1000, ce qui signifie que leur différence sera divisible par 1000. Or une différence de deux sommes du type $c_1a_1+\cdots+c_{10}a_{10}$ avec $c_i=0$ ou 1 est précisément une somme du type $b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_{10}a_{10}$ avec $b_i=-1, 0$ ou 1.

**Solution de l'exercice 29 :** Enoncé

**Première solution (sans les congruences) :**
Soit $n = \underbrace{\overline{a_k\cdots a_2a_1a_0}}_{\text{écriture décimale de } n} = a_k\times 10^k+\cdots+a_2\times 10^2+a_1\times 10^1+a_0$ le nombre choisi par le spectateur, et soit $a_i$ le chiffre (non nul) barré.
Alors le spectateur calcule
$a_k\times 10^{k-1}+\cdots+a_{i+1}\times 10^i+a_{i-1}\times 10^{i-1}\cdots+a_2\times 10^2+a_1\times 10^1+a_0-(a_k+\cdots+a_2+a_1+a_0)=$
$a_k\times(10^{k-1}-1)+\cdots+a_{i+1}\times(10^i-1)+a_{i-1}\times(10^{i-1}-1)+\cdots+a_2\times(10^2-1)+a_1\times(10^1-1)-a_i$.
Mais, pour chaque $k\geqslant 1$, $10^k-1=(10-1)(10^{k-1}+\cdots+10^2+10^1+1)$ (faire le lien avec la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique) donc $10^k-1=9(10^{k-1}+\cdots+10^2+10^1+1)$ est un multiple de 9.
Puisque la somme de multiples de 9 est un multiple de 9, le nombre calculé par le spectateur est de la forme
$9A-a_i=9(A-1)+(9-a_i)$.
$a_i$ étant un chiffre non nul, $(9-a_i)$ est le reste de la division euclidienne de $9A-a_i$ par 9.

Conclusion : si $N$ est le nombre révélé par le spectateur, le chiffre barré dans le nombre initial est $9-r$, où $r$ est le reste de la division euclidienne de $N$ par 9.

Remarque : En pratique, le reste de la division d'un entier $n$ par 9 se calcule en additionnant les chiffres du nombre, et en répétant le procédé jusqu'à obtenir un nombre entre 0 et 8.
En effet, si $n=a_k\times 10^k+\cdots+a_2\times 10^2+a_1\times 10^1+a_0$, la différence de ce nombre avec la somme de ses chiffres est $a_k\times 10^k+\cdots+a_2\times 10^2+a_1\times 10^1+a_0-a_k\cdots-a_2-a_1-a_0=a_k\times(10^k-1)+\cdots+a_2\times(10^2-1)+a_1\times(10^1-1)$, qui est un multiple de 9, pour la même raison que ci-dessus. Donc le nombre $n$ et la somme de ses chiffres ont le même reste dans la division par 9.

**Deuxième solution (avec les congruences)** :
Si $N$ est le nombre initialement choisi et $S$ la somme de ses chiffres, $N'$ le nouveau nombre (obtenu en barrant le chiffre $c$ (avec $c\neq 0$) de l'écriture de $N$) et $S'$ la somme de ses chiffres, on a $N\equiv S\,[9]$, $N'\equiv S'\,[9]$ et $S'=S-c$.
Alors le nombre révélé au magicien est $N'-S=N'-S'-c\equiv -c\,[9]$.
Si $r$ est le reste modulo 9 de $N'-S$, on a $c=9-r$ (puisque $c\neq 0$ : si $r=0$, on a $c=9$).
Dans l'exemple donné, $N'-S=7088$, d'où $r=5$ et alors $c=9-5=4$.

**Solution de l'exercice 30 :** Enoncé

1. $a\equiv 0\,[n] \iff$ (il existe $q$ entier tel que $a=q\times n+0$) $\iff$ $a$ est divisible par $n$

2. Si $a \equiv b\ [n]$, il existe $q_1$ et $q_2$ entiers relatifs tels que $a = q_1 \times n + r$ et $b = q_2 \times n + r$, avec $r$ entier, $0 \leqslant r < n$.
   On a alors $a - b = (q_1 - q_2)n$, et ainsi $a - b \equiv 0\ [n]$.
   Réciproquement, si $a - b \equiv 0\ [n]$, il existe un entier $q$ tel que $a - b = qn$. Posons $b = q_1 n + r$, avec $0 \leqslant r < n$.
   Alors $a = b + qn = q_1 n + r + qn = (q_1 + q)n + r$ et donc $a$ et $b$ ont le même reste modulo $n$, ce qui signifie que $a \equiv b\ [n]$.

3. Si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$, alors $a - b \equiv 0\ [n]$ et $b - c \equiv 0\ [n]$, donc $a - b$ et $b - c$ sont multiples de $n$, et il en est de même pour $(a - b) + (b - c) = a - c$, donc $a - c \equiv 0\ [n]$, et finalement $a \equiv c\ [n]$.

4. si $a \equiv a_1\ [n]$ et $b \equiv b_1\ [n]$, alors $a - a_1$ et $b - b_1$ sont multiples de $n$ (règle **2.**), et il en est de même pour $(a - a_1) - (b_1 - b) = (a + b) - (a_1 + b_1)$ et pour $ab - a_1 b_1 = a(b - b_1) + (a - a_1)b_1$.
   Donc (règle **2.**) $a + b \equiv a_1 + b_1\ [n]$ et $ab \equiv a_1 b_1\ [n]$.
   De cette dernière congruence, et puisque $-1 \equiv -1\ [n]$, on déduit $-a \equiv -a_1\ [n]$

**Solution de l'exercice 31 :** Enoncé
Un nombre est congru à son chiffre des unités modulo 10.
$3^0 \equiv 1\ [10]$
$3^1 \equiv 3\ [10]$
$3^2 \equiv 9\ [10]$
$3^3 \equiv 7\ [10]$
$3^4 \equiv 1\ [10]$
• Si $k = 4m$, $3^k = 3^{4m} = (3^4)^m \equiv 1^m \equiv 1\ [10]$ : le chiffre des unités est 1.
• Si $k = 4m + 1$, $3^k = 3^{4m+1} = 3 \times (3^4)^m \equiv 3 \times 1^m \equiv 3\ [10]$ : le chiffre des unités est 3.
• Si $k = 4m + 2$, $3^k = 3^{4m+2} = 3^2 \times (3^4)^m \equiv 9 \times 1^m \equiv 9\ [10]$ : le chiffre des unités est 9.
• Si $k = 4m + 3$, $3^k = 3^{4m+3} = 3^3 \times (3^4)^m \equiv 7 \times 1^m \equiv 7\ [10]$ : le chiffre des unités est 7.

**Solution de l'exercice 32 :** Enoncé
Modulo 3, $2^n + 5^n + 8^n \equiv (-1)^n + (-1)^n + (-1)^n \equiv 3 \times (-1)^n \equiv 0$.
Donc $2^n + 5^n + 8^n$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Solution de l'exercice 33 :** Enoncé
Soit $n = \underbrace{\overline{a_k \cdots a_2 a_1 a_0}}_{\text{écriture décimale de } n} = a_k \times 10^k + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0$ un nombre, écrit en base 10.
Alors, puisque $10^k \equiv 1\ [3]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $n \equiv a_k + \cdots + a_1 + a_0\ [3]$.
Un nombre est donc congru, modulo 3, à la somme de ses chiffres ; ainsi un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 3.
Les congruences précédentes sont encore valables modulo 9. Donc un nombre est congru, modulo 9, à la somme de ses chiffres, et ainsi un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 9.

**Solution de l'exercice 34 :** Enoncé
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $10 \equiv (-1)\ [11]$ donc $10^k \equiv (-1)\ [11]$.
Soit $n = \underbrace{\overline{a_k \cdots a_2 a_1 a_0}}_{\text{écriture décimale de } n} = a_k \times 10^k + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0$ un nombre, écrit en base 10.
Alors $n \equiv a_k \times (-1)^k + \cdots + a_2 \times (-1)^2 + a_1 \times (-1)^1 + a_0$. ; donc un nombre est congru, modulo 11, à la somme alternée de ses chiffres, et ainsi un nombre est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11.

**Solution de l'exercice 35 :** Enoncé

1.

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^k \equiv \cdots\ [97]$ | 1 | 10 | 3 | 30 | 9 | 90 | 27 | 76 | 81 | 34 | 49 | 5 | 50 |

   On passe d'une colonne à l'autre en multipliant le reste modulo 97 par 10, puis en prenant à nouveau le reste modulo 97.

2. Programme TI82

```
1→R
For(I,1,13)
reste(R*10,97)→R

Disp "10 EXP",I,"=",R,"MOD 97"
Pause
End
```

3. $1\ 85\ 08\ 75\ 123\ 456 = 1\times 10^{12} + 85\times 10^{10} + 8\times 10^{8} + 75\times 10^{6} + 123\times 10^{3} + 456$
$\equiv 50 + 85\times 49 + 8\times 81 + 75\times 27 + 123\times 30 + 456 \equiv 73\ [97]$
La clé est donc $C = 97 - 73 = 24$. On constate que la carte est fausse...

4. Si $N = a\times 10^6 + b$, on a $N \equiv a\times 27 + b\ [97]$ et donc $C \equiv 97 - (27a + b)\ [97]$.
Dans notre exemple, $N = 1850875 \times 10^6 + 123456$ donc $C \equiv 97 - (27\times 1850875 + 123456) \equiv 73\ [97]$.

**Solution de l'exercice 36 :** Enoncé

1. Le NIR 2 54 12 77 523 017 nous indique que le propriétaire de la carte :
   - est une femme
   - née en 1954
   - au mois de décembre
   - dans le département de la Seine-et-Marne
   - dans la commune Villuis. Mais pour trouver ce nom, il faut consulter le code des communes...
   - et que sa naissance était la 17e de l'année, dans sa commune.
2. La clé de 2 54 12 77 523 017 est $C = 30$, donc le NIR complet est 2 54 12 77 523 017 30.
3. Si on inverse les 12e et 13e chiffres, le nouveau NIR, sans la clé, est 2 54 12 77 523 071 et sa clé est 73, donc on détectera une erreur si on connaît la vraie clé, 30.
4. Si on change le code commune en 620, le nouveau NIR, sans la clé, est 2 54 12 77 620 071 et sa clé est 30, la même que pour le vrai NIR, donc l'erreur ne sera pas détectée.

**Solution de l'exercice 37 :** Enoncé

1. Pour $n = 0$, $N = 2^{2^2} + 316 + 3 = 19$, divisible par 19.
2. $2^6 = 2^3 \times 2^3 \equiv (-1)\times(-1) \equiv 1\ [9]$.
Donc le reste de la division euclidienne de $2^{6n}$ par $k$ est 1, et on peut écrire $2^{6n} = 9k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$.
3. $2^{18} \equiv (2^6)^3 \equiv 7^3 \equiv 7^2 \times 7 \equiv 11 \times 7 \equiv 77 \equiv 1\ [19]$.
4. $2^{2^{6n+2}} + 3 = 2^{2^{6n}\times 2^2} + 3 \equiv 2^{(9k+1)\times 4} + 3$
$\equiv 2^{36k+4} + 3 \equiv 2^{36k} \times 2^4 + 3 \equiv (2^{18})^{2k} \times 16 + 3 \equiv 1^{2k} \times 16 + 3 \equiv 19 \equiv 0\ [19]$.
Ainsi, $N$ est divisible par 19.

**Solution de l'exercice 38 :** Enoncé

1. **a.** $23 = 3\times 7 + 2 = 3\times 7 + 1 + 1$, donc pour passer du 01/01/1900 au 23/01/1900, on ajoute 3 semaines et un jour.
Le 23/01/1900 était donc un mardi.
**b.** Pour passer du lundi 01/01/1900 au 31/01/1900, on ajoute 30 jours (de janvier), c'est-à-dire $30 = 4\times 7 + 2$ jours, soit 4 semaines et 2 jours.
Donc le 31/01/1900 était un mercredi.

2. **a.** Pour passer du lundi 01/01/1900 au 01/02/1900, on ajoute 30 jours (de janvier) et 1 jour (de février), c'est-à-dire $31 = 4\times 7 + 3$ jours.
Donc le 01/02/1900 était un jeudi.
**b.** Pour passer du jeudi 01/02/1900 au 01/03/1900, on ajoute 27 jours (de février) et 1 jour (de mars), c'est-à-dire $28 = 4\times 7 + 0$ jours.
Donc le 01/03/1900 était un jeudi.
**c.** Pour passer du jeudi 01/03/1900 au 01/04/1900, on ajoute 30 jours (de mars) et 1 jour (d'avril), c'est-à-dire $31 = 4\times 7 + 3$ jours.
Donc le 01/04/1900 était un dimanche.

**Solution de l'exercice 39 :** Enoncé

1. $\dfrac{a}{b} = q + \dfrac{r}{b}$, avec $0 \leqslant \dfrac{r}{b} \leqslant \dfrac{b-1}{b} < 1$ ; donc $q \leqslant \dfrac{a}{b} < q+1$, ce qui prouve que $q = E\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

2. Les années divisibles par 4 comprises strictement entre 1900 et 2300 sont les années de la forme $1900+4k$ (car 1900 est multiple de4), avec $1900 < 1900+4k < 2300$, c'est-à-dire $0 < 4k < 2300-1900$, ou encore $0 < 4k \leqslant 2300-1900-1$, ce qui revient à $0 < k \leqslant \dfrac{399}{4}$ et donc à $1 \leqslant k \leqslant \mathrm{E}\left(\dfrac{399}{4}\right)$.

   On a donc $\mathrm{E}\left(\dfrac{399}{4}\right) = 99$ années répondant à la condition.

3. Les années divisibles par 100 comprises strictement entre 1900 et 2300 sont les années de la forme $1900+100k$ (car 1900 est multiple de100), avec $1900 < 1900+100k < 2300$, c'est-à-dire $0 < 100k < 2300-1900$,

   ou encore $0 < 100k \leqslant 2300-1900-1$, ce qui revient à $0 < k \leqslant \dfrac{399}{100}$ et donc à $1 \leqslant k \leqslant \mathrm{E}\left(\dfrac{399}{100}\right)$.

   On a donc $\mathrm{E}\left(\dfrac{399}{100}\right) = 3$ années répondant à la condition.

4. Il y a 1 année divisible par 400 comprise strictement entre 1900 et 2300 : l'année 2000.

   Attention, ici 1900 n'est pas multiple de 400, donc on ne peut pas procéder comme dans les deux questions précédentes.

5. En utilisant les questions précédentes, on trouve $\mathrm{E}\left(\dfrac{399}{4}\right) - \mathrm{E}\left(\dfrac{399}{100}\right) + 1 = 97$ années bissextiles strictement comprises entre 1900 et 2300.

6. Entre l'année 1900 et l'année 2300 (cette dernière non incluse), il y a $2300-1900 = 400$ années et 97 années bissextiles , ce qui fait $365 \times 400 + 97 = 146097$ jours.

   Or $= 146097 \equiv 0$ [7], donc le 01/01/2300 est un lundi.

   Pour aller au 14/07/2300 à partir du lundi 01/01/2300, on ajoute (modulo 7) 2 jours pour janvier (puisque qu'il faut 30 jours finir le mois et $30 = 4 \times 7 + 2$), 0 jour pour février (car 2300 n'est pas bissextile et

   $28 = 4 \times 7 + 0$), 3 jours pour mars (car $31 = 4 \times 7 + 3$), 2 jours pour avril (car $30 = 4 \times 7 + 2$), 3 jours pour mai (car $31 = 4 \times 7 + 3$), 2 jours pour juin (car $30 = 4 \times 7 + 2$), 14 jours pour aller jusqu'au 14/07/2300. En tout, on a ajouté $2+0+3+2+3+2+14 = 26 \equiv 5$ [7].

   Donc le 14/07/2300 sera un samedi (lundi +5 jours).

**Solution de l'exercice 40 :** Enoncé

1. On cherche le nombre d'années divisibles par 4 qui précèdent l'année $A$, c'est-à-dire les nombres $4k$ tels que $1 \leqslant 4k \leqslant A-1$, ce qui revient à $\dfrac{1}{4} \leqslant k \leqslant \dfrac{A-1}{4}$ , ou encore $1 \leqslant k \leqslant E\left(\dfrac{A-1}{4}\right)$ (puisque $k$ est entier).

   De même , on a $E\left(\dfrac{A-1}{100}\right)$ années divisibles par 100 et $E\left(\dfrac{A-1}{400}\right)$ divisibles par 400 précédant l'année $A$.

   Donc le nombre d'années bissextiles précédant l'année $A$ est $\mathrm{E}\left(\dfrac{A-1}{4}\right) - \mathrm{E}\left(\dfrac{A-1}{100}\right) + \mathrm{E}\left(\dfrac{A-1}{400}\right)$.

2. $P = 365(A-1) + B \equiv B + A - 1$ [7] car $365 \equiv 1$ [7].

3. 

| Mois | Janv | Février | Mars | Avril | Mai | Juin | Juillet | Août | Sept | Oct | Nov | Déc |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D \equiv \cdots$ [7] | 0 | 3 | 3 | 6 | 1 | 4 | 6 | 2 | 5 | 0 | 3 | 5 |

   Le nombre $N$ de jours du 01/01/01 au $J/M/A$ (ces deux jours inclus) est donc tel que $N \equiv B+A-1+D+J+C$ [7], où $C = 1$ si $A$ est bissextile **et** si $M \geqslant 3$ , et $C = 0$ sinon.

4. Le nombre $N$ correspondant au 01/01/2019 est tel que

   $N \equiv \mathrm{E}\left(\dfrac{2019-1}{4}\right) - \mathrm{E}\left(\dfrac{2019-1}{100}\right) + \mathrm{E}\left(\dfrac{2019-1}{400}\right) + 2019 - 1 + 0 + 1 + 0 \equiv 2$ [7].

| Jour de la semaine | Lundi | Mardi | Mercredi | Jeudi | Vendredi | Samedi | Dimanche |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N \equiv \cdots$ [7] | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |

**Solution de l'exercice 41 :** Enoncé

- Programme Python :

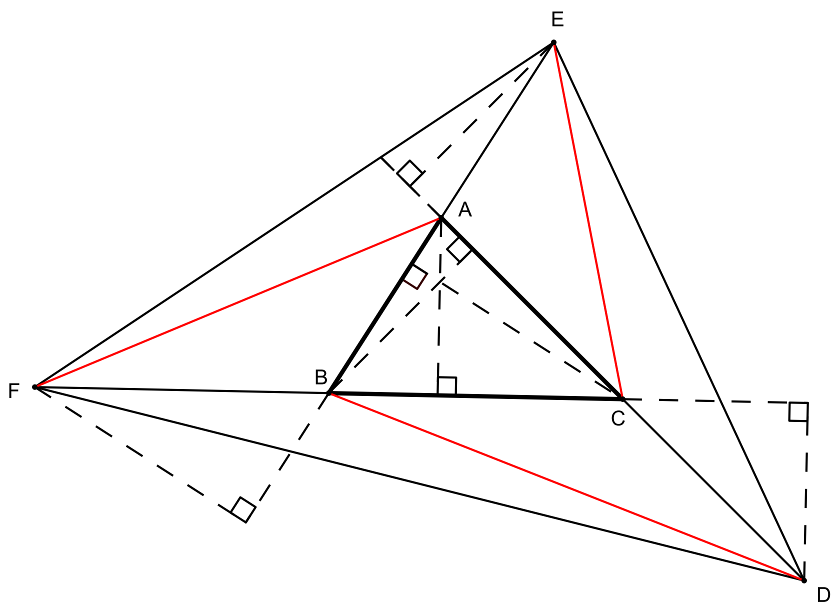
```
from math import *
d =[0,3,3,6,1,4,6,2,5,0,3,5]   # on place les décalages de jours, de janvier à décembre, dans une liste
l=["DIMANCHE","LUNDI","MARDI","MERCREDI","JEUDI","VENDREDI","SAMEDI"] # liste des jours de la semaine
J=int(input("Jour?"))
M=int(input("Mois?"))
A=int(input("Année?"))
if  ((( A%4==0 and A%100!=0) or A%400==0) and M>=3): # on teste si A est bissextile, et le numéro du mois
    C=1
else:
    C=0
N=A-1+floor((A-1)/4)-floor((A-1)/100)+floor((A-1)/400)+J+d[M-1]+C # floor() donne la partie entière
N=N%7 # reste de N modulo 7
print (l[N]) # on affiche  le jour correspondant à N (dimanche pour 0, lundi pour 1, etc ).
```

- Programme TI 82 :

```
EffListe L₆
{0,3,3,6,1,4,6,2,5,0,3,5}→L₆
Prompt J
Prompt M
Prompt A
If (((reste(A,4)=0 et reste(A,100)≠0) ou reste(A,400)=0) et M≥3)
Then
1→C
Else
0→C
End
A-1+ent((A-1)/4)-ent((A-1)/100)+ent((A-1)/400)+J+L₆(M)+C→N
reste(N,7)→N
If N=1
Then
Disp "LUNDI"
Else
If N=2
Then
Disp "MARDI"
Else
If N=3
Then
Disp "MERCREDI"
Else
If N=4
Then
Disp "JEUDI"
Else
If N=5
Then
Disp "VENDREDI"
Else
If N=6
Then
Disp "SAMEDI"
Else
If N=0
Then
Disp "DIMANCHE"
```

**Solution de l'exercice 42 :** Enoncé

**1.**



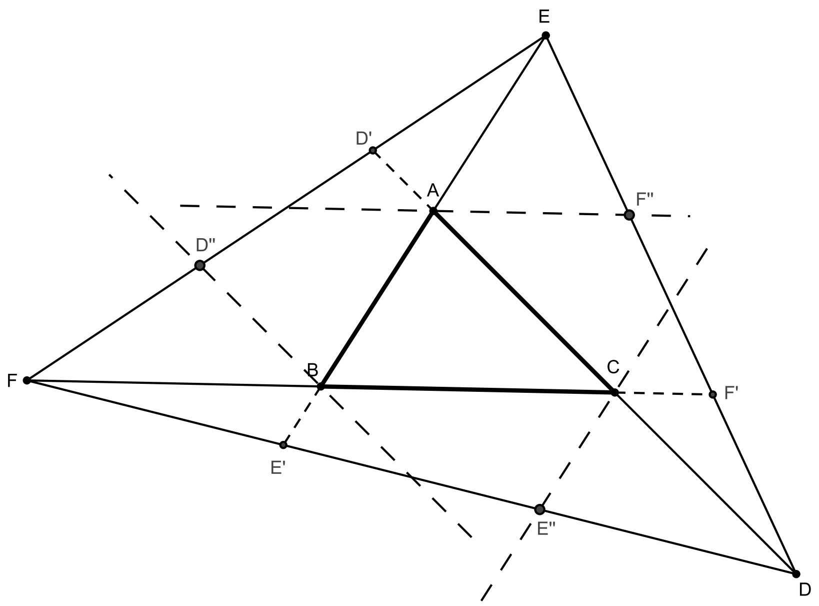

Rappelons que deux triangles de même base et de même hauteur ont la même aire.

C'est le cas des triangles EAC et ECD ; DBC et DBF ; FBA et FAE, puis des triangles CAB et CEA ; BAC et BCD ; ABC et AFB.

Donc les triangles EAC, ECD, DBC, DBF, FBA, FAE et ABC ont la même aire ; la somme de leurs aires est l'aire de DEF.

Ainsi, l'aire de DEF est 7 fois celle de ABC.

**2.**



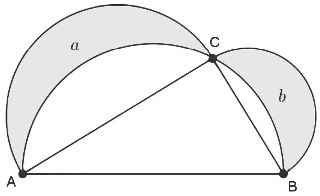

On construit E', point d'intersection de (AB) avec (FD), puis on trace (CE")//(AB) (E"∈ [FD]).

Dans FCE", avec (E'B)//(E"C), on a FB=BC donc FE'=E'E".

Dans DAE', avec (AE')//(CE"), on a AC=CD donc E'E"=E"D. Ainsi, FE'=E'E"=E"D, ce qui prouve que FE'=$\frac{1}{3}$FD.

On procède de manière analogue pour les autres points.

**Solution de l'exercice 43 :** Enoncé

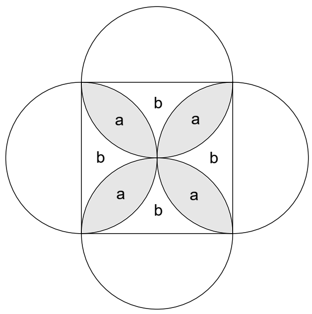



Notons $a$ et $b$ les aires des lunules, et soient T l'aire du triangle ABC, $\mathrm{D_{AB}}$ l'aire du demi-disque de diamètre [AB], et définissons de façon analogue $\mathrm{D_{AC}}$ et $\mathrm{D_{BC}}$.

Alors $a+b+\mathrm{D_{AB}} = \mathrm{T}+\mathrm{D_{AC}}+\mathrm{D_{BC}}$, c'est-à-dire $a+b+\dfrac{\pi \mathrm{AB}^2}{8} = \mathrm{T}+\dfrac{\pi \mathrm{AC}^2}{8}+\dfrac{\pi \mathrm{BC}^2}{8} = \mathrm{T}+\dfrac{\pi}{8}\underbrace{(\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2)}_{\mathrm{AB}^2} = \mathrm{T}+\dfrac{\pi \mathrm{AB}^2}{8}$

Donc $\mathrm{T} = a+b$.

**Solution de l'exercice 44 :** Enoncé




Soit $a$ l'aire d'une feuille de la rosace, et soit $b$ l'aire d'un domaine indiqué sur la figure ci-dessus.

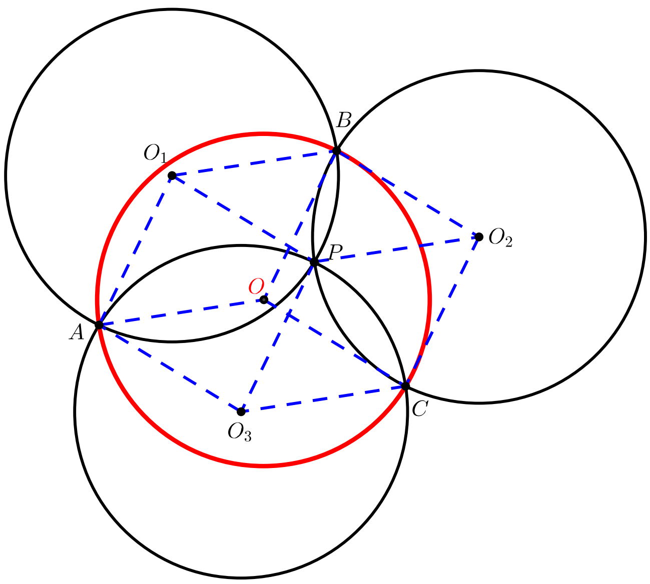
On a $2b$ = aire du carré - aire d'un disque constitué de 2 demi-disques de rayon 10 cm

$2b = 20^2 - \pi \times 10^2$

d'où $b = \dfrac{400-100\pi}{2} = 50(4-\pi)$

L'aire de la rosace est donc $20^2 - 4\times b = 400-200(4-\pi) = 200\pi - 400 = \boxed{200(\pi-2)\ \mathrm{cm}^2}$

**Solution de l'exercice 45 :** Enoncé



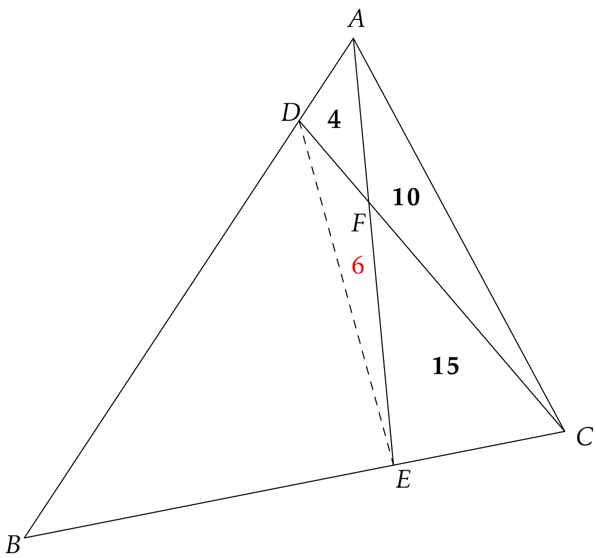

On trace les losanges (quatre côtés de même longueur) $AO_1PO_3$, $BO_1PO_2$ et $PO_2CO_3$. La figure obtenue nous suggère de la compléter en une représentation d'un cube en perspective, ce qui conduit au point $O$.
Concrètement, on commence par construire par exemple le parallélogramme $AO_1BO$, qui est donc un losange (deux côtés consécutifs de même longueur).
On a alors $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{O_1B} = \overrightarrow{PO_2} = \overrightarrow{O_3C}$, et ainsi le quadrilatère $AOCO_3$ est un losange (parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur). Cela prouve que $O$ est équidistant de $A$, $B$ et $C$, et donc que $A$, $B$ et $C$ appartiennent à un même cercle (de centre $O$), de même rayon que les trois cercles initiaux.

**Solution de l'exercice 46 :** Enoncé

Puisque les triangles $ABD$ et $ADC$ ont la même hauteur relative à leurs bases respectives $BD$ et $DC$, et compte tenu de la formule $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ donnant l'aire d'un triangle, leurs aires respectives sont dans le même rapport que leur bases :

$$\frac{\mathcal{A}(ABD)}{\mathcal{A}(ADC)} = \frac{BD}{DC}$$

**Solution de l'exercice 47 :** Enoncé




$\dfrac{DF}{DC} = \dfrac{\mathcal{A}(ADF)}{} = \dfrac{4}{10} = 0,4.$

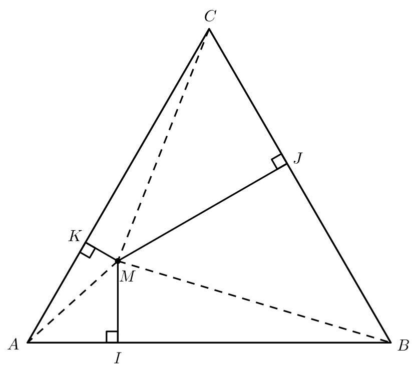
Mais aussi $\dfrac{DF}{DC} = \dfrac{\mathcal{A}(DFE)}{\mathcal{A}(FEC)} = \dfrac{\mathcal{A}(DFE)}{15}$, d'où $\mathcal{A}(DFE) = 0,4 \times 15 = 6$.

Par ailleurs, $\dfrac{DA}{BD} = \dfrac{\mathcal{A}(ADC)}{\mathcal{A}(BCD)} = \dfrac{14}{\mathcal{A}(BED)+21}$ et $\dfrac{DA}{BD} = \dfrac{\mathcal{A}(DEA)}{\mathcal{A}(BED)} = \dfrac{10}{\mathcal{A}(BED)}$, d'où $14\mathcal{A}(BED) = 10\mathcal{A}(BED)$,

et ainsi $\mathcal{A}(BED) = \dfrac{210}{4} = 52,5$.

Conclusion : $\mathcal{A}(ABC) = 52,5 + 6 + 4 + 10 + 15 = 87,5$.

**Solution de l'exercice 48 :** Enoncé



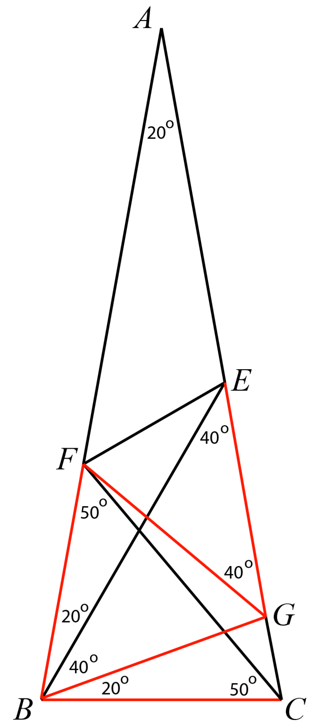

La somme des aires des triangles $AMB$, $BMC$ et $AMC$ est égale à l'aire du triangle $ABC$, donc

$\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{AB \times MI}{2} + \dfrac{BC \times MJ}{2} + \dfrac{AC \times MK}{2} = \dfrac{a(MI+MJ+MK)}{2}$, d'où $MI + MJ + MK = \dfrac{2}{a}\mathcal{A}(ABC)$,

ou encore, puisque $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{a \times a\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

$MI + MJ + MK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

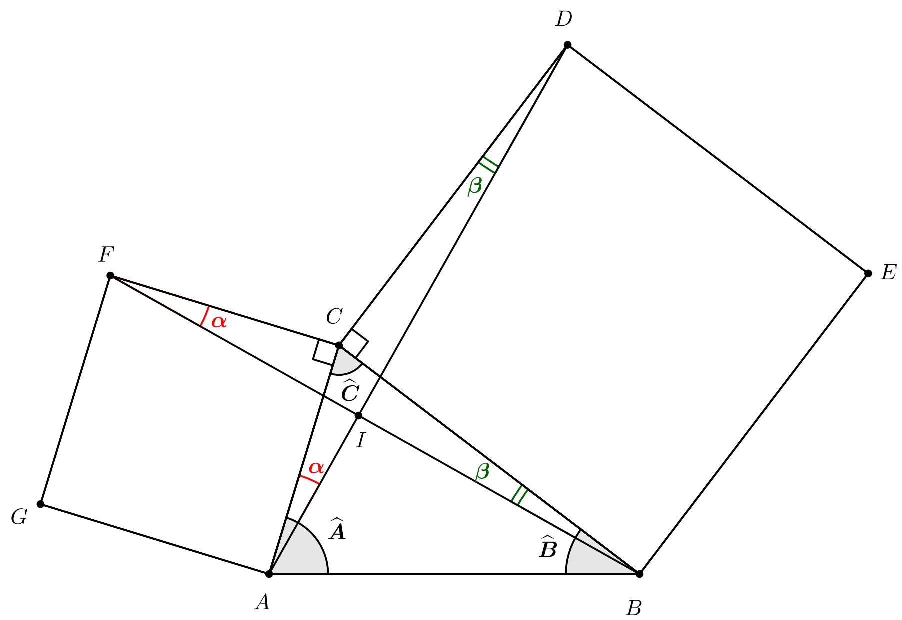
**Solution de l'exercice 49 :** Enoncé




Plaçons $G$ sur $[AC]$, tel que $\widehat{CBG}=20°$, puis traçons $[FG]$.
Puisque $\widehat{BCG}=80°$ et $\widehat{CBG}=20°$, on a $\widehat{BGC}=80°$ et alors $BCG$ est isocèle en $B$, d'où $BC=BG$.
Puisque $\widehat{BCF}=50°$ et $\widehat{CBF}=80°$, on a $\widehat{BFC}=50°$ et alors $BCF$ est isocèle en $B$, d'où $BC=BF$.
Puisque $\widehat{FBG}=60°$ et $BF=BG$, $BGF$ est équilatéral.
Puisque $\widehat{BGE}=100°$ et $\widehat{GBE}=40°$, on a $\widehat{GEB}=40°$ et alors $BGE$ est isocèle en $G$, d'où $GB=GE$.
Ainsi, tous les segments rouges ont la même longueur.
Puisque $GE=GF$, $EFG$ est isocèle en $G$, d'où $\widehat{GEF}=70°$.
Finalement, $\widehat{BEF}=30°$.

**Solution de l'exercice 50 :** Enoncé
Les triangles $DAE$, $DCF$ et $EBF$ sont isométriques (triangles isocèles de même angle au sommet principal).
Donc $DE=DF=EF$, et ainsi $DEF$ est équilatéral.

**Solution de l'exercice 51 :** Enoncé




Les triangles $CFB$ et $CAD$ sont isométriques (un angle de même mesure : $\widehat{FCB}=\widehat{ACD}$ entre deux côtés de mêmes longueurs : $CF=CA$ et $CB=CD$).
Donc $FB=AD$.
Dans le triangle $IAB$ : $\widehat{A}-\alpha+\widehat{B}-\beta+\widehat{AIB}=180°$

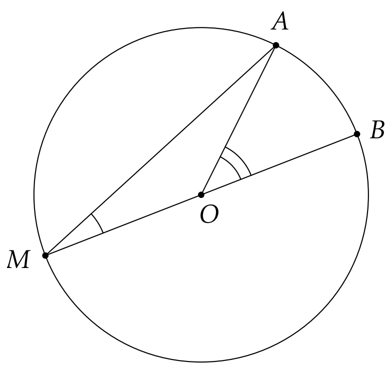
Dans le triangle $ACD$ : $\alpha+\beta+\widehat{C}+90°=180°$

Donc, en additionnant membre à membre les égalités ci-dessus : $\underbrace{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}}_{180°}+90°+\widehat{AIB}=360°$, d'où $\widehat{AIB}=90°$.

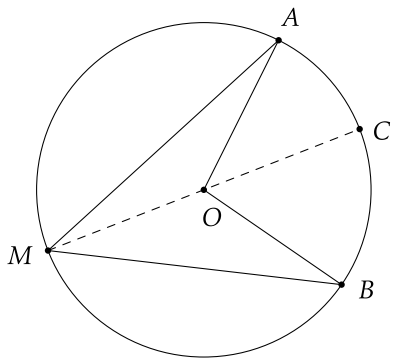
Ainsi, les segments $[BF]$ et $[AD]$ sont perpendiculaires.

**Solution de l'exercice 52 :** Enoncé

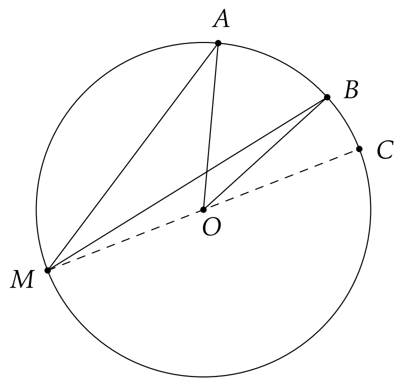
***Preuve :*** Supposons d'abord $\widehat{AMB}$ aigu. Considérons trois cas.




cas 1

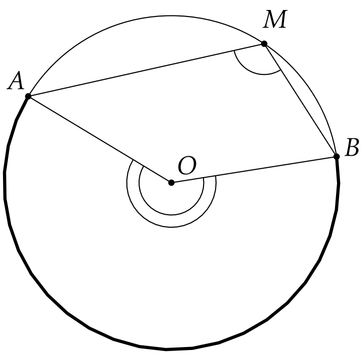


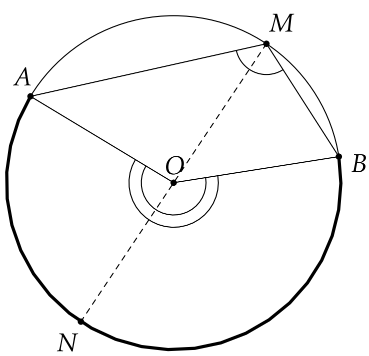

cas 2




cas 3

**cas 1 :** $O$ est situé sur $[MA]$ (ou $[MB]$).
$MOA$ étant isocèle en $O$, $\widehat{AMB} = \widehat{MAO} = \frac{1}{2}(180° - \widehat{MOA}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.
**cas 2 :** $A$ et $B$ sont de part et d'autre de $(AC)$, où $C$ est le point du cercle diamétralement opposé à $M$.
D'après le premier cas, $\widehat{AMC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ et $\widehat{CMB} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$, d'où par addition :
$\widehat{AMB} = \widehat{AMC} + \widehat{CMB} = \frac{1}{2}(\widehat{AOC} + \widehat{COB}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.
**cas 3 :** $A$ et $B$ sont du même côté de $(AC)$, où $C$ est le point du cercle diamétralement opposé à $M$.
D'après le premier cas, $\widehat{AMC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ et $\widehat{CMB} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$, d'où par soustraction :
$\widehat{AMB} = \widehat{AMC} - \widehat{CMB} = \frac{1}{2}(\widehat{AOC} - \widehat{COB}) = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.
Il reste à examiner le cas où $\widehat{AMB}$ est obtus.



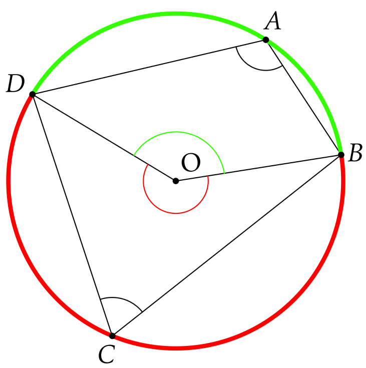

Soit $N$ le point du cercle diamétralement opposé à $M$.

$\widehat{AMB}$ est obtus (sa mesure est entre 90° et 180°), et $\widehat{AMN}$ et $\widehat{NMB}$ sont aigus, et le premier cas conduit à

$\widehat{AMN} = \frac{1}{2}\widehat{AON}$ et $\widehat{NMB} = \frac{1}{2}\widehat{NOB}$ et finalement, par addition,

$\widehat{AMB} = \widehat{AMN} + \widehat{NMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (angle rentrant : sa mesure est entre 180° et 360°).

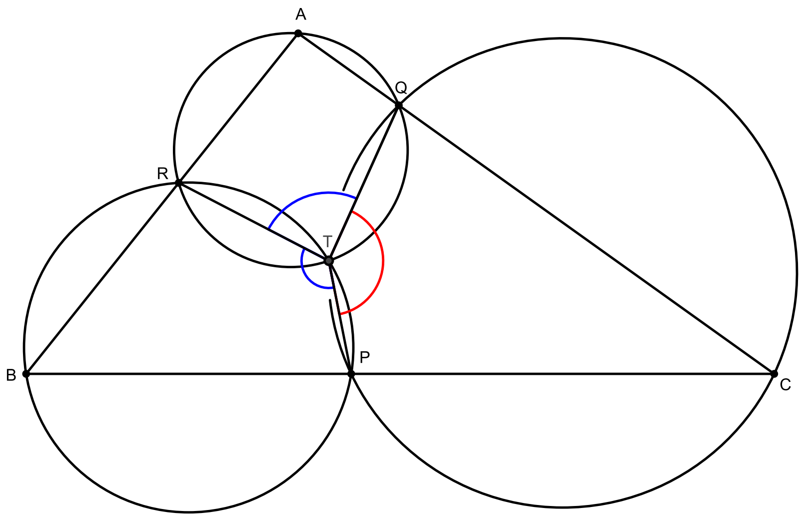
**Solution de l'exercice 53 :** Enoncé



L'angle $\widehat{BAD}$ intercepte l'un des arcs $\overset{\frown}{BD}$, et $\widehat{BCD}$ intercepte l'autre arc $\overset{\frown}{BD}$.
Par le théorème de l'angle inscrit et l'angle au centre, on a : $\widehat{DOB} = 2 \times \widehat{DAB}$ et $\widehat{DOB} = 2 \times \widehat{DCB}$ (dans le cas de la figure ; sinon, on intervertit l'angle obtus et l'angle rentrant).
Ainsi, puisque $\widehat{DOB} + \widehat{DOB} = 360°$, $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180°$.

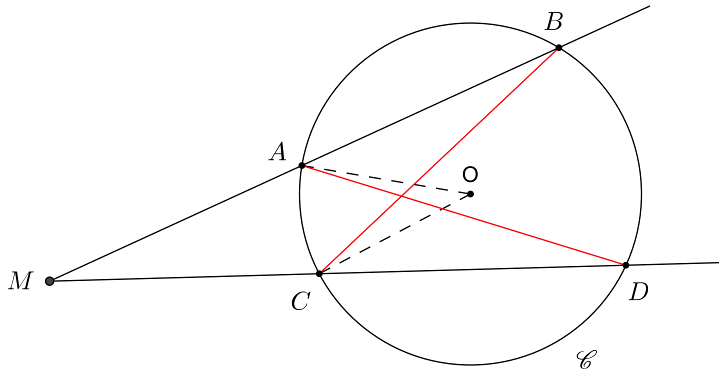
Réciproquement, supposons que $\widehat{DAB} + \widehat{DCB} = 180°$, et soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle $ABD$.
$\mathscr{C}$ coupe la droite $(AC)$ en un point $C'$. Mais alors $\widehat{DAB} + \widehat{DC'B} = 180°$ (voir ci-dessus),
d'où $\widehat{DC'B} = 180° - \widehat{DAB} = \widehat{DCB}$, ce qui n'est possible que si $C = C'$, et cela prouve la réciproque.

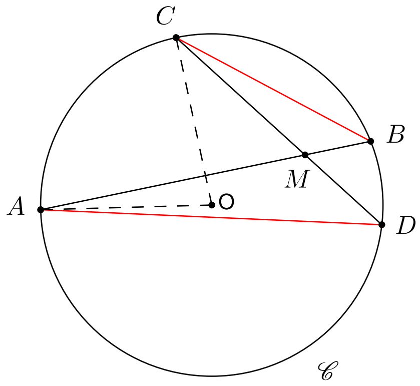
**Solution de l'exercice 54 :** Enoncé




On appelle $T$ le point d'intersection autre que $R$ des deux premiers cercles, et on va montrer que $T$ est sur le cercle circonscrit à $CQP$, c'est-à-dire que le quadrilatère $CQTP$ est inscriptible dans un cercle.
Le quadrilatère $ARTQ$ est inscrit dans un cercle, donc $\widehat{RTQ} = 180° - \widehat{A}$. De même, $\widehat{PTR} = 180° - \widehat{B}$.
Donc $\widehat{QTP} = 360° - \widehat{RTQ} - \widehat{PTR} = \widehat{A} + \widehat{B} = 180° - \widehat{C}$.
Donc le quadrilatère $CQTP$ est inscriptible dans un cercle : $T$ est sur le cercle circonscrit à $CQP$.

**Solution de l'exercice 55 :** Enoncé

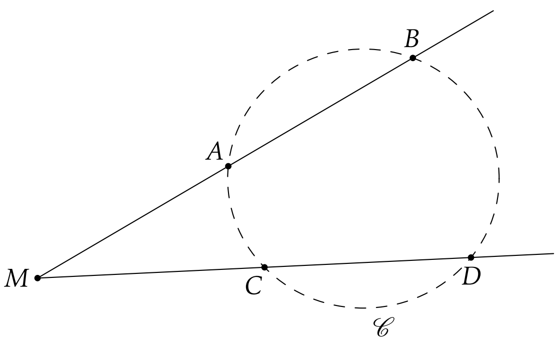


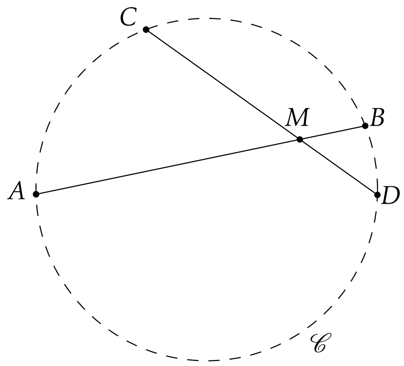




Dans les deux cas de figure ci-dessus, les triangles MAD et MCB sont semblables car $\widehat{BMC} = \widehat{DMA}$ (sommet M commun) et $\widehat{ABM} = \widehat{CDA}$ (angles inscrits interceptant le même arc de cercle).

Il en résulte $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MB}$, d'où $MA \times MB = MC \times MD$.

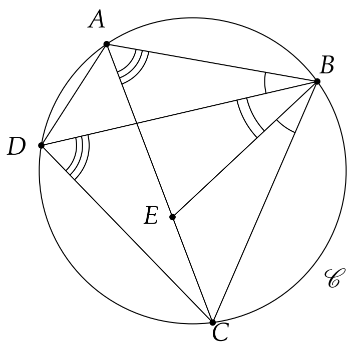
Réciproquement, soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC, et soit D' le deuxième point d'intersection de la droite (MC) avec le cerle $\mathscr{C}$.




Alors, d'après la propriété prouvée précédemment (le cas direct), on a $MA \times MB = MC \times MD'$. Mais on a aussi, par hypothèse, $MA \times MB = MC \times MD$. Il en résulte $D = D'$ ($D$ et $D'$ étant du même côté de $M$ sur la droite $(MC)$).

**Solution de l'exercice 56 :** Enoncé




Soit $E$ le point de $[AC]$ tel que $\widehat{CBE} = \widehat{DBA}$. Puisque de plus $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (angles interceptant le même arc de cercle), les triangles $ABD$ et $EBC$ sont semblables. On en déduit $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AD}{EC}$.

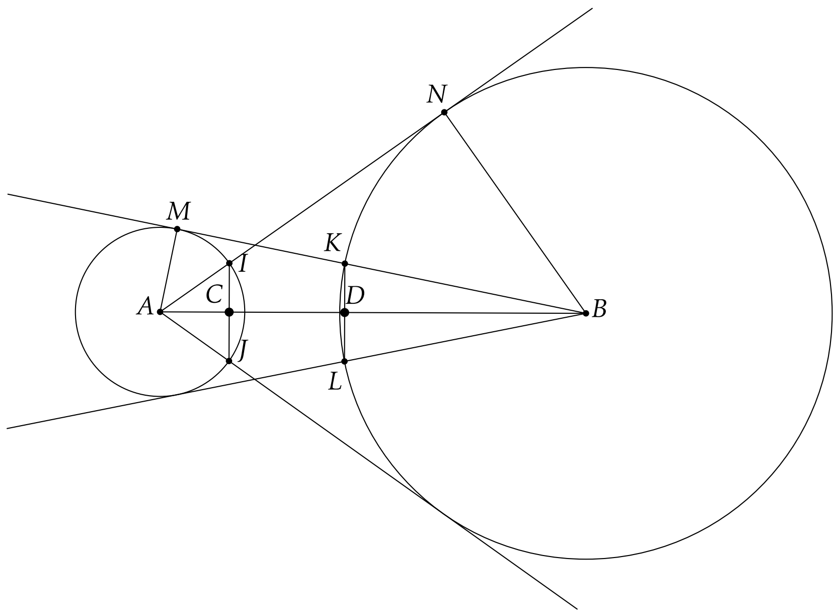
Il en résulte $BD \times EC = AD \times BC$.

De même, $ABE$ et $DBC$ sont semblables, donc $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AE}{DC}$, et ainsi $AB \times DC = DB \times AE$.

Puisque $AC = AE + EC$, on obtient finalement, après multiplication par $BD$ :

$AC \times BD = AE \times BD + EC \times BD = AB \times DC + AD \times BC$

**Solution de l'exercice 57 :** Enoncé




Par symétrie d'axe $(AB)$, $[IJ]$ et $[KL]$ sont perpendiculaires à $(AB)$, de milieux respectifs $C$ et $D$ situés sur $(AB)$.
Donc $ACI$ et $BDK$ sont rectangles en $C$ et $D$ respectivement.
De plus, les triangles $AMB$ et $ANB$ sont rectangles respectivement en $M$ et $N$ (propriété des tangentes à un cercle).
Les triangles $ACI$ et $ANB$ sont semblables, car ils ont un angle commun $\widehat{IAC} = \widehat{NAB}$, et chacun un angle droit.
On a donc $\dfrac{IC}{AI} = \dfrac{BN}{AB}$, et ainsi $IC = \dfrac{AI \times BN}{AB}$.
De même, les triangles $BDK$ et $BMA$ sont semblables, d'où l'on déduit $\dfrac{KD}{BK} = \dfrac{AM}{BA}$ et aussitôt $KD = \dfrac{AM \times BK}{BA}$.

Puisque $AI = AM$ et $BN = BK$ (rayons des cercles), on a alors $IC = KD$ et finalement

$$IJ = KL = 2 \times \frac{\text{produit des rayons des cercles}}{\text{distance entre les centres des cercles}}$$