Correction du devoir commun de mathématiques

Exercice 1 :

1) $A = -6 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} \times \frac{3}{25} = -\frac{120}{20} + \frac{30}{20} + \frac{5\times3}{4\times5\times5} = -\frac{120}{20} + \frac{30}{20} + \frac{3}{4\times5} = -\frac{87}{20}$

$B = \frac{10^{-15}\times(10^2)^3}{10^{-8}} = \frac{10^{-15}\times10^6}{10^{-8}} = \frac{10^{-9}}{10^{-8}} = 10^{-9+8} = 10^{-1}(= 0{,}1)$

$C = 4\sqrt{27} - 5\sqrt{3} - 2\sqrt{12} = 4 \times \sqrt{9}\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 2 \times \sqrt{4}\sqrt{3} = 12\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

2) $D(x) = (-3x+5)(8x-7) = -24x^2 + 21x + 40x - 35 = -24x^2 + 61x - 35$

$E(x) = (x+5)^2 + (2x-3)^2 = x^2 + 10x + 25 + 4x^2 - 12x + 9 = 5x^2 - 2x + 34$

3) $A(x) = (2x+3)(x+1) - (2x+3)(4x-2) = (2x+3)(x+1-4x+2) = (2x+3)(-3x+3)$

$B(x) = 9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2$

4) Quelle relation d'appartenance est correcte ? $c)$ $\frac{111}{3} \in \mathbb{N}$

A quelle inégalité la relation d'appartenance $x \in [-2\,;3[$ est-elle équivalente ? $d) -2 \leq x < 3$

Quel nombre n'appartient pas à la réunion d'intervalles $[-5; 1] \cup [3; 5]$? $d)$ $\sqrt{3}$

Dans quel intervalle $[-2; 1]$ est-il inclus ? $a)$ $[-4; 1{,}001]$

5) $5x(7-x)\left(\frac{x}{3} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow 5x = 0$ ou $7 - x = 0$ ou $\frac{x}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 7$ ou $x = 6$ donc

$S = \{0; 6; 7\}$

$(2x-3)^2 = (5-x)^2 \Leftrightarrow (2x-3)^2 - (5-x)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(3x-8) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \; ou \; x = \frac{8}{3}$ donc

$S = \left\{-2; \frac{8}{3}\right\}$

6) $-2 + 3x \leq 2x + 1 \Leftrightarrow x \leq 3$ donc $S =]-\infty; 3]$

$\frac{(2x+1)(-x+7)}{2x-5} < 0$

Soit $K(x) = \frac{(2x+1)(-x+7)}{2x-5}$

$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$-x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$

$2x - 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}$ est la valeur interdite.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		7	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-x+7$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$2x-5$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$K(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

Donc $S =]-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}[\cup]7; +\infty[$

Exercice 2 :

1) Le prix d'un produit augmente de 12,5%. Quel est le coefficient multiplicateur associé à cette évolution ?

$\text{CM} = 1{,}125$

2) L'effectif d'un lycée est passé de 1550 élèves à 1519 élèves l'année suivante. Préciser son évolution en pourcentage.

$\frac{1519-1550}{1550} = -0{,}02$ donc l'effectif a baissé de 2%.

3) Bruno gagne 1230€ par mois. Son salaire augmente de 4%. Quel est le nouveau salaire de Bruno ?

$1230 \times 1{,}04 = 1279{,}20$

Le nouveau salaire est 1279,20 € .

4) Parmi les 32 élèves d'une classe, 24 déjeunent à la cantine. Quel est le pourcentage de demi-pensionnaires ?

$\frac{24}{32} = 0{,}75$

75% des élèves sont demi-pensionnaires.

5) Après une augmentation de 4% ; un DVD coûte 31,20€. Quel est le prix avant augmentation ?

$\frac{31{,}2}{1+\frac{4}{100}} = 30$

Le prix avant augmentation est de 30 euros

Exercice 3:

1) On considère l'algorithme suivant :

```
A=400
For i in range (1,5) :
    A=A*0,85+7
Print A
```

- Quelle est la valeur de A à la fin de l'algorithme ? Pour vous aider à répondre à cette question, vous pouvez éventuellement compléter le tableau suivant.

i	1	2	3	4	
A	347	301,95	263,66	231,11	

$A \approx 231{,}11$ à la fin de l'algorithme.

2) Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il détermine le seuil N à partir duquel $A \geq 750$

```
A=400
N=0
While A<750:
    A=A*0,85+7
    N=N+1
Print N
```

Exercice 4 :

A la fin de la saison, on dresse le bilan des scores des clubs de basket ayant participé à un tournoi. On obtient les résultats suivants :

scores	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	55	56	57
effectifs	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	4	2	2	5	2	3	1	2
ECC	1	2	4	5	6	8	9	10	12	13	17	19	21	26	28	31	32	34

- Combien de clubs sont concernés ? 34

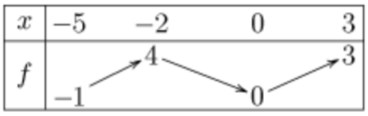
- Déterminer l'étendue et la moyenne des scores durant ce tournoi (arrondir au centième près).
  $57 - 38 = 19$ donc l'étendue est égale à 19.
  $\frac{38\times1+39\times1+40\times2+\cdots+57\times2}{34} \approx 48{,}18$ donc la moyenne est égale à 48,18.
- Quel est le pourcentage de clubs ayant obtenu un score supérieur ou égal à 50 ? (arrondir au dixième près).
  $\frac{15}{34} = 0{,}441$ donc 44,1% des clubs ayant obtenu un score supérieur ou égal à 50
- Déterminer la médiane et les quartiles de cette série statistique.
  34 est pair donc la médiane est la moyenne de la 17$^{\text{ème}}$ et de la 18$^{\text{ème}}$ valeur donc la médiane est égale à 48,5.
  $\frac{34}{4} = 8{,}5$ donc Q_1 est la 9$^{\text{ème}}$ valeur donc $Q_1 = 44$

  $3 \times \frac{34}{4} = 25{,}5$ donc Q_3 est la 26$^{\text{ème}}$ valeur donc $Q_3 = 51$

- Quel score minimal faut-il pour être classé parmi le quart des meilleurs clubs ?
  Il faut le score de 51 pour être classé parmi le quart des meilleurs clubs.

Exercice 5 :

On définit une fonction f par son tableau de variations :
A l'aide de ce tableau de variations, indiquer si les égalités ou inégalités proposées sont vraies, fausses ou si le tableau ne permet pas de conclure :



$f(-1) = -5$ Faux

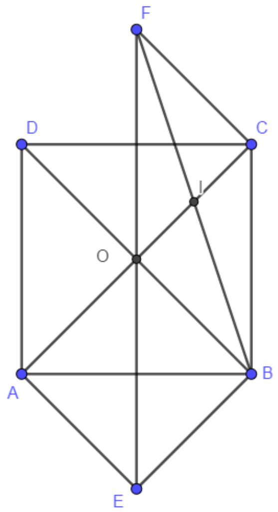
$f(-4) > f(-2)$ Faux

$f(-3) > 1$ le tableau ne permet pas de conclure

$f(-5) < f(2)$ Vrai

Exercice 6 : **Soit ABCD un carré de centre O. Compléter la figure au fur et à mesure.**

- Construire le point E tel que $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{EB}$ et le point F tel que les segments $[OC]$ et $[BF]$ se coupent en leur milieu que l'on appelle I.



- Démontrer que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OB}$ puis que $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{FC}$

  $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow AOBE$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OB}$

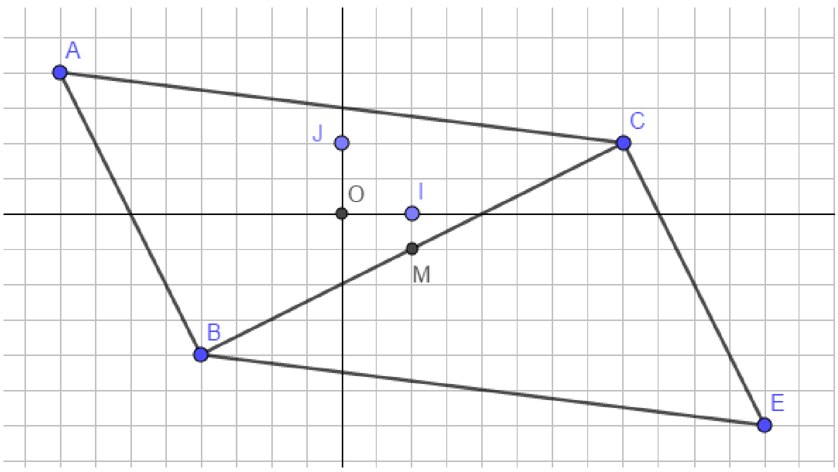
  Les diagonales [BF] et [OC] ont le même milieu I ce qui est équivalent à OBCF est un parallélogramme, et donc à $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OB}$

- Que peut-on en déduire pour le quadrilatère AECF ?

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{FC}$ donc $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FC}$ donc AECF est un parallélogramme

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath},\vec{\jmath}$), soient $A(-4\,;\,2), B(-2\,;\,-2), C(4\,;\,1)$

- Placer les points A, B et C sur le graphique ci-dessous.



- Calculer la longueur AB

$$AB=\sqrt{(-2+4)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

- Placer le point E tel que le quadrilatère ABEC soit un parallélogramme.

- Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point E.

ABEC soit un parallélogramme$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+4 = x_E - 4 \\ -2-2 = y_E - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 6 \\ y_E = -3 \end{cases}$ donc $E(6;-3)$.

- Calculer les coordonnées du point M milieu du segment [BC].

M milieu du segment [BC] $\Leftrightarrow$ M $\left(\frac{-2+4}{2};\frac{-2+1}{2}\right) \Leftrightarrow M\left(1;-\frac{1}{2}\right)$.

- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$.

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

- Les points A, O et M sont-ils alignés ? Justifier

  $\det(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}) = -4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \times 1 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ donc les points A, O et M sont alignés.

  Autre méthode : $\overrightarrow{OA} = -4\,\overrightarrow{OM}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ donc les points A, O et M sont alignés.

Exercice 7 :

1) Déterminer l'image de 0 par f
   L'image de 0 est -2.

2) $f(-1) = -1$

3) Dresser le tableau de variations de f.

x	-3		0		3		4
f	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

4) Les antécédents éventuels de 2 sont $-2{,}5$ et 3.

5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -1$

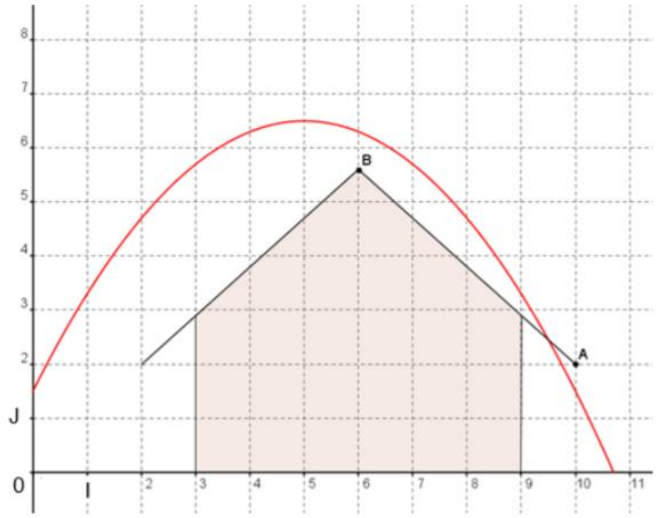
$$S = \{-1;1\}$$

Exercice 8 :

Durant une balade en forêt, un enfant se fabrique un arc et des flèches. Il s'intéresse à la trajectoire d'une de ses flèches. L'enfant décide de tirer sa flèche par-dessus un hangar désaffecté. La trajectoire est une portion de la courbe représentative de la fonction f située dans le quart de plan rapporté au repère (O, I, J) ci-dessous et définie pour tout réel x, par

$$\boldsymbol{f(x) = -0,2(x-5)^2 + 6,5}$$

Une unité graphique correspond à 1 mètre dans la réalité.



1. a. De quelle hauteur, en mètres, la flèche est-elle tirée
   Justifier la réponse par un calcul.

$f(0) = -0,2(0-5)^2 + 6,5 = 1,5$
La flèche est tirée d'une hauteur de 1,5m.

b. Quelle hauteur maximale, en mètres, atteint-elle ?
Justifier la réponse par un calcul.

Pour tout réel x, $(x-5)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -0,2(x-5)^2 \leq 0$ car $-0,2 < 0$

$$\Leftrightarrow\ -0,2(x-5)^2 + 6,5 \leq 6,5$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq 6,5$$

Cela prouve que si le maximum existe, il est nécessairement inférieur ou égal à 6,5.
De plus, $f(5) = -0,2 \times 0^2 + 6,5 = 6,5$ ce qui prouve que le maximum est atteint et qu'il vaut $f(5) = 6,5$.

La hauteur maximale atteinte est 6,5 m.

2. On s'intéresse au pan du toit représenté par le segment $[AB]$, où $A(10\ ;\ 2)$ et $B(6\ ;\ 5,6)$ dans le repère (O, I, J). On appelle g la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est la droite (AB).
Déterminer l'expression de la fonction g.

$10 \neq 6$ donc le coefficient directeur de (AB) est égal à $\frac{5,6-2}{6-10} = -0,9$

$$(AB): y = -0,9x + b$$

$A(10\ ;\ 2) \in (\mathrm{AB}) \Leftrightarrow 2 = -0,9 \times 10 + b \Leftrightarrow b = 11$

$(AB): y = -0,9x + 11$

3. Démontrer que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = -0,2(x-5)(x-9,5)$.

pour tout réel x,

$$f(x) - g(x) = -0,2(x-5)^2 + 6,5 - (-0,9x + 11) = -0,2x^2 + 2x - 5 + 6,5 + 0,9x - 11$$
$$= -0,2x^2 + 2,9x - 9,5$$

$$-0,2(x-5)(x-9,5) = -0,2(x^2 - 14,5x + 47,5) = -0,2x^2 + 2,9x - 9,5$$

4. Quelles sont les coordonnées exactes du point d'impact sur le toit ?

$$fx) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -0,2(x-5)(x-9,5) \Leftrightarrow x = 5\ ou\ x = 9,5$$

Le segment $[AB]$ est tel que $6 \leq x \leq 10$
Donc le point d'impact sur le toit a pour abscisse 9,5.

$-0,9 \times 9,5 + 11 = 2,45$
Le point d'impact a pour coordonnées (9,5; 2,45).

Exercice 9 :

Antoine désire partir en vacances et consulte le catalogue d'une agence de voyage.

- Le catalogue comprend 400 références différentes.
- 60 % comprennent un forfait voyage + séjour, les autres ne comprenant que le séjour sur place.
- 45 % des références proposant le forfait voyage + séjour sont à destination d'un pays d'Amérique du Sud.
- Parmi les références incluant uniquement le séjour, 55 sont à destination d'un pays d'Amérique du Sud, 85 sont à destination d'un pays d'Asie.
- Aucune référence correspondant à une destination en Asie ne propose le forfait voyage + séjour.

1) Compléter le tableau ci-dessous:

	Voyage et séjour	Séjour uniquement	Total
Amérique du Sud	108 $240 \times \frac{45}{100}$	55	163 $= 108 + 55$
Asie	0	85	85
Antilles	132 $= 240 - 108$	20 $= 160 - 55 - 85$	152 $= 162 + 20$
Total	240 $= 400 \times \frac{60}{100}$	160 $= 400 - 240$	400

2) On choisit une référence au hasard. On considère les événements :

A : « la référence correspond à un pays d'Amérique du Sud»;

I : « la référence correspond à un pays d'Asie»;

V : «la référence comprend un forfait voyage + séjour ».

a) $p(A) = \frac{163}{400}$

$p(V) = \frac{240}{400}$

$p(A \cap V) = \frac{108}{400}$

b) Décrire par une phrase l'événement $A \cup V$ et calculer sa probabilité.

$A \cup V$: « la référence correspond à un pays d'Amérique du Sud ou comprend un forfait voyage + séjour ».

$$p(A \cup V) = p(A) + p(V) - p(A \cap V) = \frac{295}{400}$$

c) Calculer $p(A \cup I)$

$$p(A \cup I) = p(A) + p(I) - p(A \cap I) = p(A) + p(I) = \frac{248}{400}$$

2) Parmi les références aux Antilles, la probabilité que ce soit une référence « Voyage et séjour » est $\frac{132}{152}$.