Pour réussir en spécialité mathématiques

- **Second degré**

– Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.
– Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré. Signe.

Exercice 1 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $-6x^2+2x+4=0$

b) $x^4-3x^2-4=0$

c) $x^2-2x+5=(x-5)(2x-1)$

d) $\frac{-2}{x+2}=\frac{3}{x-1}$

Correction
a) $-6x^2+2x+4=0$

$x_1=1$ est une racine évidente donc $x_2=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$. $S=\left\{1;-\frac{2}{3}\right\}$

b) $x^4-3x^2-4=0$

On pose $X=x^2$ et l'équation revient à résoudre $X^2-3X-4=0$

$X_1=-1$ est une racine évidente et $X_2=4$. Donc $x^2=-1$ (impossible donc pas de solution pour cette équation) ou $x^2=4$ $S=\{-2;2\}$

c) $x^2-2x+5=(x-5)(2x-1) \Leftrightarrow x^2-2x+5=2x^2-10x-x+5 \Leftrightarrow -x^2+9x=0 \Leftrightarrow$

$x(-x+9)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=9$ $S=\{0;9\}$

d) Pour $x\neq -2$ et $x\neq 1$,

$$\frac{-2x}{x+2}=\frac{3x+2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{-2x(x-1)}{(x+2)(x-1)}-\frac{(3x+2)(x+2)}{(x-1)(x+2}=0 \Leftrightarrow \frac{-5x^2-6x-4}{(x+2)(x-1)}=0$$

Racines de $-5x^2-6x-4$

$\Delta=-44<0$ donc $-5x^2-6x-4$ n'a pas de racine donc $S=\emptyset$

Exercice 2 :
1) On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=x^3+x^2-2$.
a) Montrer que 1 est racine de P.
b) Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout nombre réel x,
$P(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.
2) On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ et par $g(x)=\frac{1}{x+1}$. On appelle C_f et C_g leurs courbes représentatives. En utilisant la question précédente, étudier la position relative de C_f et C_g.

Correction
1)a) $P(1)=1^3+1^2-2=0$
b) Pour tout nombre réel x, $(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+x^2(b-a)+x(c-b)-c$

Par indentification des coefficients,

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = 0 \\ -c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ 2 - 2 = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

Donc pour tout nombre réel x, $P(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 2)$

2) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Pour tout réel $x \neq -1$, $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2(x+1)-2}{2(x+1)} = \frac{x^3+x^2-2}{2(x+1)} = \frac{P(x)}{2(x+1)} = \frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{2(x+1)}$

Signe de $x^2 + 2x + 2$

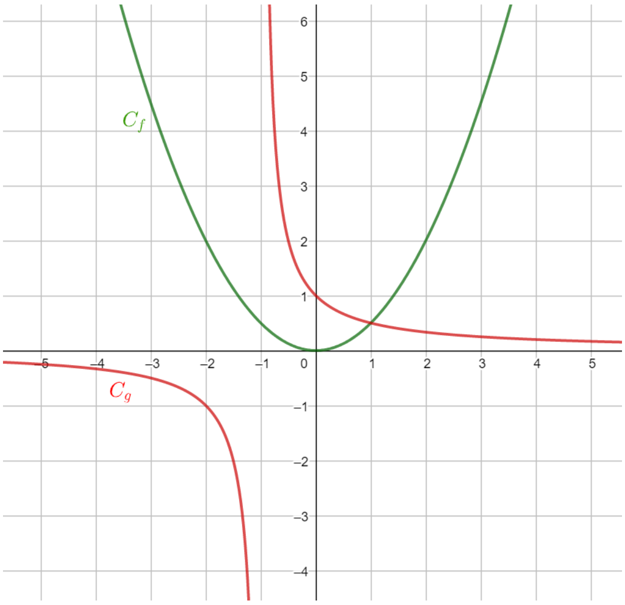
$\Delta = -4 < 0$ donc pour tout réel x, $x^2 + 2x + 2 > 0$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2+2x+2		$+$	|	$+$	|	$+$	
$2(x+1)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, C_f est située au-dessus de C_g.

Sur $]-1;1[$, C_f est située en-dessous de C_g.

En 1, C_f et C_g ont un point d'intersection.



- **Fonctions**

– Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point. Équation : la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

– Fonction dérivée des fonctions carré, cube, inverse, racine carrée. Pour n dans $\mathbb{Z}$, fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$

– Opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient, fonction dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$

– Fonction valeur absolue : courbe représentative, étude de la dérivabilité en 0.

– Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée ; caractérisation des fonctions constantes.

– Nombre dérivé en un extremum, tangente à la courbe représentative.

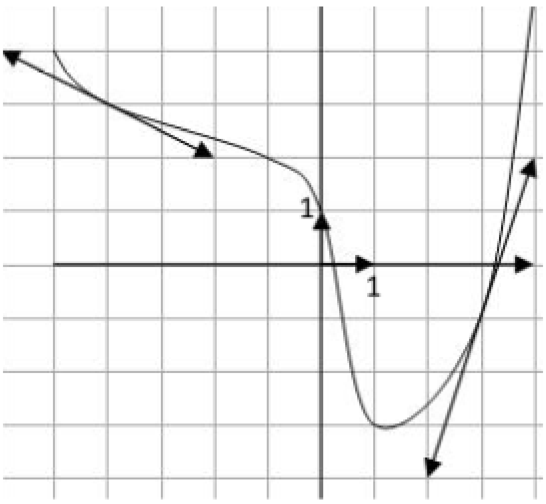
Exercice 1 :
Préciser sur quels intervalles les fonctions ci-dessous sont dérivables, puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = -3x^5 + x^4 - \frac{2}{x^3}$
2) $f(x) = (2x-5)(3x^2+7)$
3) $f(x) = \frac{3}{2x^2+7}$
4) $f(x) = \frac{2x+5}{-5x+7}$
5) $f(x) = \frac{x^2+3x-5}{7x^2+1}$
6) $f(x) = \sqrt{2x-8}$
7) $f(x) = \sqrt{-x+8}$
8) $f(x) = (-x+8)^9$
9) $f(x) = (3x+2)^7$

Correction

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = -15x^4 + 4x^3 + \frac{6}{x^4}$.
2) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$f'(x) = 2(3x^2+7) + (2x-5) \times 6x = 6x^2 + 14 + 12x^3 - 30x = 12x^3 + 6x^2 - 30x + 14$
3) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -\frac{12x}{(2x^2+7)^2}$
4) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{7}{5}\}$ et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{7}{5}\}$. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{\frac{7}{5}\}$, $f'(x) = \frac{39}{(-5x+7)^2}$
5) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-21x^2+72x+3}{(7x^2+1)^2}$
6) La fonction $f$est définie sur $[4;+\infty[$ et dérivable sur $]4;+\infty[$. Pour tout x de $]4;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-8}}$
7) La fonction $f$est définie sur $]-\infty;8]$ et dérivable sur $]-\infty;8[$. Pour tout x de $]-\infty;8[$, $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x+8}}$
8) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -9(-x+8)^8$
9) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 21(3x+2)^6$

Exercice 2 :
La courbe $C_f$ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1) Par lecture graphique, déterminer $f'(-4)$ et $f'(3)$.
2) En déduire l'équation réduite des tangentes à C_f aux points d'abscisses -4 et 3.

Correction

$f'(-4) = -\frac{1}{2}$ et $f'(3) = 3$
$f(-4) = 3$ et $f(3) = -1$
$T_{-4}: y = f'(-4)(x+4) + f(-4) = -\frac{1}{2}(x+4) + 3 = -\frac{1}{2}x + 1$
$T_3: y = f'(3)(x-3) + f(3) = 3(x-3) - 1 = 3x - 10$

Exercice 3 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$.
1) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 à la courbe C_f.
2) Etudier la position relative de T_{-1} et de C_f courbe représentative de la fonction f.
3) La courbe C_f admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?

Correction
1) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x - 4$
$f(-1) = 2 + 4 + 2 = 8$ et $f'(-1) = -8$
$T_{-1}: y = f'(-1)(x + 1) + f(-1) = -8(x + 1) + 8 = -8x$
2) **Rappel :** Pour étudier la position relative de deux courbes C_f et C_g , on étudie le signe de leur différence par exemple $f(x) - g(x)$.
Etudier la position relative de T_{-1} et de C_f courbe représentative de la fonction f équivaut à étudier le signe de $f(x) - (-8x)$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) - (-8x) = 2x^2 - 4x + 2 + 8x = 2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)^2$
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $2(x + 1)^2 \geq 0$
Donc C_f est située au-dessus de T_{-1} sur $\mathbb{R}$
3) Les tangentes parallèles à l'axe des abscisses ont un coefficient directeur égal à 0. On cherche a tel que $f'(a) = 0$
$f'(a) = 0 \Leftrightarrow 4a - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$
La courbe C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.

Exercice 4 :
On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = x^4 - 4x^2 - 2x + 1$.
On note C sa courbe représentative.
1) Déterminer pour tout réel x, $g'(x)$.
2) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
3) Etudier la position relative de la courbe C avec la tangente T.

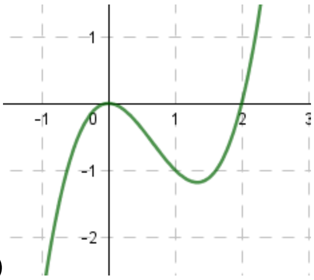
Indication : pour tout réel x, $g(x) - (-2x + 1) = x^2(x^2 - 4)$.

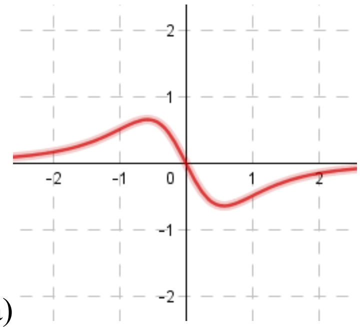
Correction
1) Pour tout réel x, $g'(x) = 4x^3 - 8x - 2$
2) $T: y = g'(0)(x - 0) + g(0) = -2x + 1$
3) Pour tout réel x, $g(x) - (-2x + 1) = x^4 - 4x^2 - 2x + 1 + 2x - 1 = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4)$.

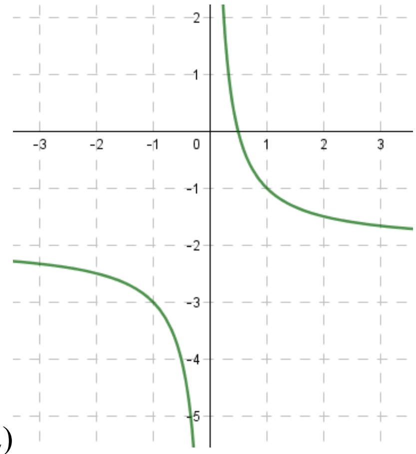
x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x^2		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$g(x)-(-2x+1)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

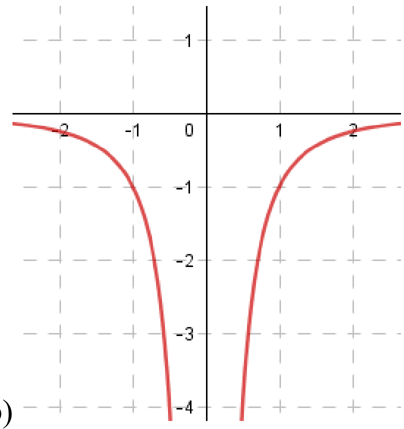
La courbe C et la tangente T ont des points d'intersection en -2 , 0 et 2.
Sur $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ la courbe C est située au-dessus de T.
Sur $[-2; 2]$, C est en dessous de T

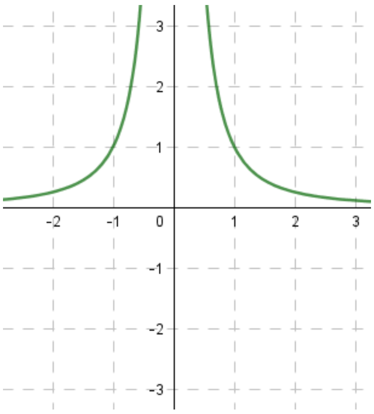
Exercice 5 :
On donne les courbes de quatre fonctions à gauche et celles de leurs dérivées à droite.
Associer chaque fonction à sa dérivée. Justifier.

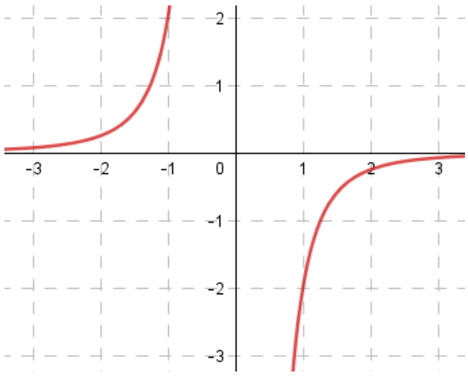

1)

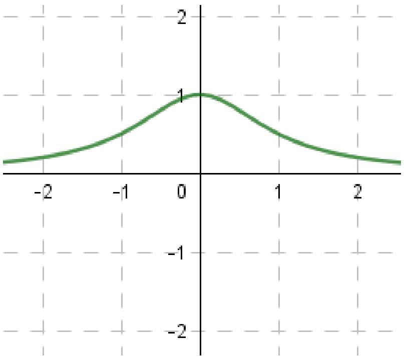

a)

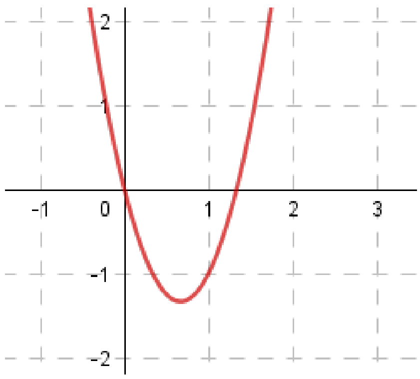

2)


b)


3)


c)


4)


d)

Correction
1-d ; 2-b ; 3-c ; 4-a

Exercice 6 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10$.
Etudier les variations de la fonction f.

Correction
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -3x^2 + 12x = 3x(-x+4)$.
Les racines de $-3x^2 + 12x$ sont 0 et 4.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	-10	↗	22	↘	

Exercice 7 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5x+3}{x^2-x+1}$.
On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1) Montrer que la dérivée de la fonction f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f'(x) = \frac{-5x^2 - 6x + 8}{(x^2 - x + 1)^2}$$
2) Etudier les variations de la fonction f.
3) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 5.

Correction
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5x+3}{x^2-x+1}$.
1) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-5(x^2-x+1)-(5x+3)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-5x^2-6x+8}{(x^2-x+1)^2}$.
2) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $(x^2 - x + 1)^2 > 0$
Donc $f'(x)$ est du signe de $-5x^2 - 6x + 8$.
$-5x^2 - 6x + 8$ a deux racines -2 et $\frac{4}{5}$ (à vous de le justifier…)

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	-1	↗	$\frac{25}{3}$	↘	

3) $f(5) = \frac{4}{3}$ et $f'(5) = -\frac{1}{3}$
$T: y = f'(5)(x-5) + f(5) = -\frac{1}{3}(x-5) + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}x + 3$

Exercice 8 :
Une entreprise produit et vend un nouveau parfum. Les ventes s'envolent et l'entreprise s'intéresse au bénéfice quotidien maximum. Utiliser les différentes informations pour calculer le bénéfice quotidien maximum.
La recette quotidienne :
La recette quotidienne de l'entreprise, en milliers d'euros est modélisée par la fonction définie sur [0 ;10] par : $R(x) = -x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 10x$ où x est la quantité en centaines de litres de parfum vendue en un jour.
Coûts fixes :
Les coûts fixes journaliers de l'entreprise s'élèvent à 2 000 euros.

Un écran de calcul formel :

$$-4x^3+18x^2-24x+10$$
$$=$$
$$-2(x-1)^2(2x-5)$$

Correction

Pour tout x de [0 ;10], $B(x)=R(x)-2=-x^4+6x^3-12x^2+10x-2$

B est dérivable sur [0 ;10] et pour tout x de [0 ;10], $B'(x)=-4x^3+18x^2-24x+10$

Pour tout réel x,

$$-2(x-1)^2(2x-5)=-2(x^2-2x+1)(2x-5)=(-2x^2+4x-2)(2x-5)$$
$$=-4x^3+10x^2+8x^2-20x-4x+10=-4x^3+18x^2-24x+10$$

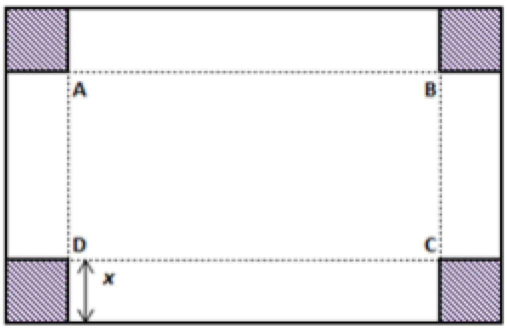
Donc pour tout x de [0 ;10], $B'(x)=-2(x-1)^2(2x-5)$

Or pour tout réel de [0 ;10], $-2(x-1)^2\leq 0$ et $2x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$

x	0		1		$\frac{5}{2}$		10
$2x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$B'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
B	-2	$\nearrow$			$2{,}6875$	$\searrow$	-5102

Exercice 9 :

On dispose une feuille de carton rectangulaire de 80 cm de long et 50 cm de large, avec laquelle on veut fabriquer une boîte ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour cela, on découpe dans la feuille quatre carrés égaux, aux quatre coins, puis on plie le carton suivant les segments $[AB], [BC], [CD]\ et\ [DA]$.
On appelle x la mesure en cm de côté de chaque carré découpé.



Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte sera maximum.
Indication : On note $V(x)$ le volume de la boîte obtenue. On a alors : $V(x)=\ 4x^3-260\ x^2\ +4000x$

Correction

$AD=50-2x$ et $AB=80-2x$

$AD\geq 0 \Leftrightarrow 50-2x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 25$

$AB\geq 0 \Leftrightarrow 80-2x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 40$

On étudie donc la fonction V sur l'intervalle $[0;25]$

Le volume d'un carton parallélépipède rectangle est $Longeur\times largeur\times hauteur$

Pour tout réel x de $[0;25]$,

$$V(x)=x(50-2x)(80-2x)=(50x-2x^2)(80-2x)=4000x-100x^2-160x^2+4x^3$$
$$=4x^3-260x^2+4000x$$

La fonction V est dérivable sur $[0;25]$, il s'agit d'un polynôme de degré 3.

Pour tout x de $[0; 25]$, $V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000$

$\Delta = 78\,400 > 0$ donc $x_1 = 10$ et $x_2 = \frac{100}{3} \notin [0; 25]$

x	0		10		25
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	18000	$\searrow$	0

Le volume maximal est donc de $18\,000 cm^3$ donc $18L$.

- **Fonction exponentielle**

– Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur ℝ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.
– Propriétés algébriques de la fonction exponentielle. Notation e^x .
– Signe, sens de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle.

Exercice 1 :

1) Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$$
$$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$$
$$C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{e^5}{e^{-6}}$$

2) Soit x un nombre réel, simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A(x) = \frac{e^{x-3} \times e^{-4x}}{e^{-3x+3}}$$
$$B(x) = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x} \times e^{-x+1}}$$
$$C(x) = \frac{e^{1+x}}{e^{2+x}}$$
$$D(x) = \left(\frac{e}{e^{-x}}\right)^4$$

3) Vérifier que la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$ est constante.

4) Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$$g(x) = \frac{e^x}{x}$$
$$h(x) = e^{-2x+5} - 3e^x - 6x$$

5) Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

$$e^{-3x+2} - 1 \geq 0$$
$$e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$$

6) Etudier les variations des fonctions k et l définies sur ℝ par

$k(x) = 3e^x - 3x$ $\qquad\qquad$ $l(x) = 4e^{-3x+2}$

7) Déterminer l'équation réduite de la tangente en 0 à la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Correction

1) Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} = e^{7-4-(-5)} = e^8$$
$$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} = e^{-30} \times e^{-3} = e^{-33}$$
$$C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{e^5}{e^{-6}} = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^5}{e^{-6}} = \frac{1+e^5}{e^{-6}}$$

2) Soit x un nombre réel, simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A(x) = \frac{e^{x-3} \times e^{-4x}}{e^{-3x+3}} = e^{x-3-4x-(-3x+3)} = e^{-6}$$
$$B(x) = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x} \times e^{-x+1}} = e^{2x\times 3-3x-(-x+1)} = e^{4x-1}$$

$$C(x) = \frac{e^{1+x}}{e^{2+x}} = e^{1+x-(2+x)} = e^{-1}$$
$$D(x) = \left(\frac{e}{e^{-x}}\right)^4 = (e^{1+x})^4 = e^{4+4x}$$

3) Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$ est constante.

$$f(x) = e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) = 2e^0 + 2e^0 = 4$$

4) Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$$g(x) = \frac{e^x}{x}$$
$$g'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$
$$h(x) = e^{-2x+5} - 3e^x - 6x$$

$$h'(x) = -2e^{-2x+5} - 3e^x - 6$$

5) Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

$$e^{-3x+2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-3x+2} \geq 1 \Leftrightarrow e^{-3x+2} \geq e^0 \Leftrightarrow -3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$$
$$e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x} \Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ ou\ x = -3$$

6)Pour tout réel x , $f(x) = 3e^x - 3x$
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x , $f'(x) = 3e^x - 3$
$3e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow 3e^x > 3 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	3	$\nearrow$

Pour tout réel x , $f(x) = 4e^{-3x+2}$
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x , $f'(x) = 4 \times (-3)e^{-3x+2} = -12e^{-3x+2}$
Pour tout réel x , $e^{-3x+2} > 0$
Pour tout réel x , $f'(x) < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

7) Déterminer l'équation réduite de la tangente en 0 à la courbe représentative de la fonction exponentielle.

$$f(x) = f'(x) = e^x$$
$$f(0) = f'(0) = e^0 = 1$$
$$T: y = 1(x - 0) + 1 = x + 1$$

Exercice 2 :

Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2 000 litres de produit par semaine. Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par :

$R(x) = (5x - 30)e^{-0,25x}$, pour tout réel $x \in [2; 20]$

1) Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.
2) Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).
3) Résoudre l'inéquation $R(x) \geq 0$, d'inconnue x. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
4) On note R' la dérivée de la fonction R.
   Déterminer la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

Correction

1) Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.

$$R(7) = (5 \times 7 - 30)e^{-0,25\times 7} \approx 0,8689 \approx 8689 euros$$

2) Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).

$$R(4) = (5 \times 4 - 30)e^{-0,25\times 4} \approx -3,679 < 0$$

3) Résoudre l'inéquation $R(x) \geq 0$, d'inconnue x. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{-0,25x} > 0$

$$R(x) \geq 0 \Leftrightarrow 5x - 30 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6$$

Le résultat est positif à partir de 600 litres produits.

4) On note R' la dérivée de la fonction R.
   Déterminer la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

Pour tout x de$[2; 20]$, $R'(x) = 5e^{-0,25x} + (5x - 30) \times (-0,25e^{-0,25x}) = (-1,25x + 12,5)e^{-0,25x}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{-0,25x} > 0$ donc $R'(x)$ est du signe de $-1,25x + 12,5$

x	2		10		20
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$f(10)$	↘	

Exercice 3 :

Simplifier les expressions suivantes :

1) e^3e^4
2) e^4e^{-4}
3) $\frac{e^5e^{-3}}{e^{-2}}$
4) $(e^4)^3e^4$
5) $(e^3)^{-2}e^5$
6) $\frac{e-\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$

Correction

1) $e^3e^4 = e^7$
2) $e^4e^{-4} = e^0 = 1$
3) $\frac{e^5e^{-3}}{e^{-2}} = e^{5-3+2} = e^4$
4) $(e^4)^3e^4 = e^{12+4} = e^{16}$
5) $(e^3)^{-2}e^5 = e^{-6+5} = e^{-1}$
6) $\frac{e-\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} = \frac{\sqrt{e}(\sqrt{e}-1)}{\sqrt{e}-1} = \sqrt{e}$

Exercice 4 :

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

1) $\exp(x) = e$
2) $\exp(-x) = 1$
3) $\exp(2x-1) = e$
4) $e^{x+x^2} = 1$
5) $e^x - e^{-x} = 0$
6) $e^{x^2+5} = (e^{x+2})^2$
7) $e^x + e^{-x} = 0$
8) $e^{3x+1} = e^{-2x+3}$
9) $e^{2x} - 1 = 0$
10) $xe^{2x} - 2e^{2x} = 0$

Correction

1) $\exp(x) = e \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1 \quad S = \{1\}$
2) $\exp(-x) = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \quad S = \{0\}$
3) $\exp(2x-1) = e \Leftrightarrow 2x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad S = \{1\}$
4) $e^{x+x^2} = 1 \Leftrightarrow x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1+x) = 0 \quad S = \{-1; 0\}$
5) $e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0 \quad S = \{0\}$
6) $e^{x^2+5} = (e^{x+2})^2 \Leftrightarrow x^2 + 5 = 2(x+2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad S = \{1\}$
7) $e^x + e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x(1 + e^{-2x}) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ ou $e^{-2x} = -1$ impossible car pour tout réel x , e^xest strictement positif donc $S = \emptyset$
8) $e^{3x+1} = e^{-2x+3} \Leftrightarrow 3x + 1 = -2x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \quad S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$
9) $e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad S = \{0\}$
10) $xe^{2x} - 2e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 0$ (impossible) ou $x = 2 \quad S = \{2\}$

Exercice 5 :

1) Déterminer les racines du polynôme $P(X) = X^2 + 4X - 5$
2) En déduire les solutions de l'équation $e^{2x} + 4e^x = 5$
3) Résoudre les équations suivantes :

$$a)\ e^{2x} + e^x - 2 = 0$$
$$b)\ e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0$$
$$c)\ e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$$

Correction

1) $S = \{-5; 1\}$
2) Soit $X = e^x$
   L'équation revient à résoudre $X^2 + 4X = 5 \Leftrightarrow X^2 + 4X - 5 = 0 \Leftrightarrow P(X) = 0$
   D'après 1) on se ramène donc à $X = -5$ ou $X = 1$
   $X = -5 \Leftrightarrow e^x = -5$ impossible
   $X = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \qquad S = \{0\}$
3) $a)\ e^{2x} + e^x - 2 = 0$
   Soit $X = e^x$
   L'équation revient à résoudre $X^2 + X - 2 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = -2$
   On a donc $X = e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $X = e^x = -2$ impossible
   $S = \{0\}$
   $b)\ e^{2x+1} + e^{x+1} - 2e = 0 \Leftrightarrow e(e^{2x} + e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow)\ e^{2x} + e^x - 2 = 0$ d'où $S = \{0\}$
   $c)\ e^x - 2e^{-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(e^{2x} - 2 + e^x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0$ (impossible) ou $e^{2x} + e^x - 2 = 0$
   d'où $S = \{0\}$

Exercice 6 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\frac{e^x+3}{e^x-1} > 0$

2) $-e^{2x} - e^x + 2 > 0$

3) $e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$

4) $e^{2x} + e^x - 2 < 0$

Correction

1) Pour tout réel x, $e^x + 3 > 0$ donc on cherche à résoudre $e^x - 1 > 0$

$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ donc $S =]0; +\infty[$

2) Soit $X = e^x$. On cherche à résoudre $-X^2 - X + 2 > 0$

Les racines de $-X^2 - X + 2$ sont -2 et 1 donc $X \in]-2; 1[$

$X \in]-2; 1[\Leftrightarrow -2 < X < 1 \Leftrightarrow -2 < e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$ donc $S =]-\infty; 0[$

3) Soit $X = e^x$. On cherche à résoudre $X^2 + 2X - 3 \geq 0$

Les racines de $X^2 + 2X - 3$ sont -3 et 1 donc $X \leq -3$ ou $X \geq 1$

$X \leq -3 \Leftrightarrow e^x \leq -3$ impossible

$X \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ donc $S = [0; +\infty[$

4) Soit $X = e^x$. On cherche à résoudre $X^2 + X - 2 < 0$

Les racines de $X^2 + X - 2$ sont -2 et 1 donc $-2 < X < 1$ donc $-2 < e^x < 1$

$-2 < e^x$ est toujours vrai donc possible

$e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$ donc $S = \mathbb{R} \cap]-\infty; 0[=]-\infty; 0[$

Exercice 7 :

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $f(x)$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer une expression de $f'(x)$.

1) $f(x) = e^{-x}$
2) $f(x) = \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$
3) $f(x) = xe^{x+1}$
4) $f(x) = e^{-3x+1}$
5) $f(x) = (x^2+1)e^{3x+1}$
6) $f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{e^x}$
7) $f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{2x}}$

Correction

1) $f(x) = e^{-x}$ $\quad f'(x) = -e^{-x}$
2) $f(x) = \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$ $\quad f'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} \times \frac{1}{2}\right)e^{\frac{x}{2}} = \frac{x+2}{4}e^{\frac{x}{2}}$
3) $f(x) = xe^{x+1}$ $\quad f'(x) = (1+x)e^{x+1}$
4) $f(x) = e^{-3x+1}$ $\quad f'(x) = -3e^{-3x+1}$
5) $f(x) = (x^2+1)e^{3x+1}$ $\quad f'(x) = \left(2x + 3(x^2+1)\right)e^{3x+1} = (3x^2+2x+3)e^{3x+1}$
6) $f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{e^x}$ $\quad f'(x) = \frac{2e^{-2x}e^x - e^x(1-e^{-2x})}{e^{2x}} = \frac{2e^{-x}-e^x+e^{-x}}{e^{2x}} = \frac{3e^{-x}-e^x}{e^{2x}} = 3e^{-3x} - e^{-x}$
7) $f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{2x}}$ $\quad f'(x) = \frac{2e^{-2x}(1+e^{2x}) - 2e^{2x}(1-e^{-2x})}{(1+e^{2x})^2} = \frac{2e^{-2x}+2-2e^{2x}+2}{(1+e^{2x})^2} = \frac{2e^{-2x}-2e^{2x}+4}{(1+e^{2x})^2}$

- **Suites**

– Exemples de modes de génération d'une suite : explicite $u_n = f(n)$, par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, par un algorithme, par des motifs géométriques.

– Suites arithmétiques : exemples, définition, calcul du terme général. Somme de termes consécutifs. Calcul de 1 + 2 + … + n.

– Suites géométriques : exemples, définition, calcul du terme général. Somme de termes consécutifs.

– Sens de variation d'une suite.

– Sur des exemples, introduction intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite.

Exercice 1 :
Etudier le sens de variations de la suite (u_n) définie par :

1) $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$
2) $u_n = 3n - 5$ pour $n \in \mathbb{N}$
3) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
4) $u_n = \sqrt{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$
5) $u_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
6) $u_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Correction
1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$
$n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ donc $2n \geq 0$ donc $2n + 1 \geq 1 > 0$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 5 - (3n - 5) = 3 > 0$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}$
$n \in \mathbb{N}^*, n > 0$ et $n + 1 > 1 > 0$ donc $n(n+1) > 0$ donc $2n + 1 \geq 1 > 0$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
La fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$ donc la suite (u_n) est croissante.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$
$n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ donc $n + 1 \geq 1 > 0$ et $n + 2 \geq 2 > 0$ donc $(n+1)(n+2) > 0$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

6) Pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{5^n}{3^{n+1}} > 0$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{5^n}{3^{n+1}}} = \frac{5^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{5^n} = \frac{5}{3} > 1$ donc la suite (u_n) est strictement croissante

Exercice 2 :
On considère la suite (u_n)définie par $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Etudier le sens de variations de (u_n).
2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \leq 1$

Correction
1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2+1}{2(n+1)^2} - \frac{n^2+1}{2n^2} = \frac{n^2((n+1)^2+1) - (n^2+1)(n+1)^2}{2n^2(n+1)^2} = \cdots = \frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2}$
$n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ donc $-2n \leq 0$ donc $-2n - 1 \leq -1 < 0$
donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
2) $u_1 = 1$
Comme la suite (u_n) est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq u_1$ donc $u_n \leq 1$.

Exercice 3 :
On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$.

1) A l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de cette suite et sa limite éventuelle.
2) Calculer u_1 et u_2. Cette suite est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.
3) On admet que u est positive et on considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$

$$v_n = 1 - \frac{3}{u_n + 2}$$

a) Calculer les premiers termes de v puis conjecturer la nature de la suite v. Démontrer cette conjecture.

b) En déduire une expression de v_n en fonction de n
c) Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{3}{1 - v_n} - 2$$

En déduire une expression de v_n en fonction de n.

Correction
1) A l'aide de la calculatrice on peut conjecturer que cette suite n'est pas monotone et elle semble converger vers 1.

n	u
0	3
1	0.5
2	1.3333
3	0.8571
4	1.0769
5	0.963
6	1.0189
7	0.9907
8	1.0047
9	0.9977
10	1.0012

2) $u_1 = \frac{2}{1+u_0} = \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2}$
$u_2 = \frac{2}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$
$u_1 - u_0 = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$ et $u_2 - u_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{6}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{8}{3}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.
3)a) $v_0 = 1 - \frac{3}{u_0+2} = \frac{2}{5}$
$v_1 = 1 - \frac{3}{u_1+2} = -\frac{1}{5}$
$v_2 = 1 - \frac{3}{u_2+2} = \frac{1}{10}$
On peut conjecturer que cette suite est géométrique car $v_1 = -\frac{1}{2}v_0$ et $v_2 = -\frac{1}{2}v_1$.
Pour tout entier naturel n ,
$v_{n+1} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}+2} = 1 - \frac{3}{\frac{2}{1+u_n}+2} = 1 - \frac{3(1+u_n)}{2+2+2u_n} = \frac{4+2u_n-3-3u_n}{4+2u_n} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} = -\frac{1}{2}v_n$ car $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$
b) Pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
c) Pour tout entier naturel n, $v_n = 1 - \frac{3}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n - 1 = -\frac{3}{u_n+2} \Leftrightarrow u_n = -\frac{3}{v_n-1} - 2 = \frac{3}{1-v_n} - 2$
donc pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3}{1-\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n} - 2$

Exercice 4:
Un magasin multimédia vend des ordinateurs et des tablettes numériques à des entreprises. En 2017, il a vendu 250 000 ordinateurs et 54 000 tablettes. Il estime que les ventes d'ordinateurs diminuent de 6% chaque année, alors que les ventes de tablettes progressent en moyenne de 8% d'une année sur l'autre. Pour tout entier n, on note respectivement a_n et b_n les ventes d'ordinateurs et de tablettes en $2017 + n$.
1) Calculer le nombre d'ordinateurs et de tablettes vendus en 2018, puis en 2019.
2) Exprimer pour tout entier naturel n a_{n+1} en fonction de a_n , puis b_{n+1} en fonction de b_n.
3) En déduire la nature des deux suites.
4) Calculer le nombre d'ordinateurs et de tablettes vendus aux entreprises en 2025.
5) Ecrire un algorithme qui permet de savoir en quelle année les ventes de tablettes dépasseront celles des ordinateurs. Donner l'année obtenue.

Correction
1) $a_1 = 250\,000 \times 0{,}94 = 235\,000$ et $a_2 = 235\,000 \times 0{,}94 = 220\,900$

$b_1 = 54\,000 \times 1{,}08 = 58\,320$ et $b_2 = 58\,320 \times 1{,}08 \approx 62\,986$
2) Pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0{,}94 \times a_n$ et $b_{n+1} = 1{,}08 \times b_n$
3) Donc les suites (a_n) et(b_n) sont géométriques de raison 0,94 et 1,08.
4) Pour tout entier naturel n, $a_n = 250\,000 \times 0{,}94^n$ et $b_n = 54\,000 \times 1{,}08^n$
2025 correspond à $n = 8$
$a_8 = 250\,000 \times 0{,}94^8 \approx 152\,392$ et $b_8 = 54\,000 \times 1{,}08^8 \approx 99\,950$
5)

```
n=0
a=250000
b=54000
while a>b:
    n=n+1
    a=a*0.94
    b=b*1.08
print(n)
```

```
12
```

Exercice 5 :
Déterminer si les suites (u_n) , (v_n) et (w_n)définies pour tout entier naturel n sont arithmétiques ou géométriques. Si oui, préciser le premier terme et la raison de la suite.

$$1)\ u_n = -4(n-4) + 3$$

$$2)\ v_n = \frac{1}{n^2+2}$$

$$3)\ w_n = 4 \times 5^{n+3}$$

Correction
1) Pour tout entier naturel n , $u_n = -4(n-4) + 3 = -4n + 19$ donc il s'agit d'une suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $u_0 = 19$.
2) $v_n = \frac{1}{n^2+2}$
$v_0 = \frac{1}{2}$;$v_1 = \frac{1}{3}$; $v_2 = \frac{1}{6}$ et $v_3 = \frac{1}{11}$
$v_1 - v_0 = -\frac{1}{6}$; $v_2 - v_1 = -\frac{1}{6}$; $v_3 - v_2 = -\frac{5}{66}$ donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.
$\frac{v_1}{v_0} = \frac{2}{3}$ et $\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2}$ Donc la suite (v_n) n'est pas géométrique

3) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4 \times 5^{n+1+3} = 4 \times 5 \times 5^{n+3} = 5u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 4 \times 5^3$.

Exercice 6 :
1) On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ arithmétique telle que $u_{14} = 12$ et $u_{20} = 0$
   a) Déterminer la raison de cette suite.
   b) Déterminer le premier terme de cette suite.
   c) En déduire l'expression du terme u_n en fonction de la valeur n.

2) On considère la suite $(v_n)_{n\in N}$ géométrique telle que $v_4 = -48$ et $v_8 = -768$
   a) Déterminer la raison de cette suite.
   b) Déterminer le premier terme de cette suite.
   c) En déduire l'expression du terme v_n en fonction de la valeur n.

Correction
1) On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ arithmétique telle que $u_{14} = 12$ et $u_{20} = 0$
a) $u_{20} = u_{14} + (20-14) \times r \Leftrightarrow 0 = 12 + 6r \Leftrightarrow r = -2$

b) $u_{20} = u_0 + (20 - 0) \times (-2) \Leftrightarrow 0 = u_0 - 40 \Leftrightarrow u_0 = 40$
c) Pour tout entier naturel n, $u_n = 40 - 2n$
2) On considère la suite $(v_n)_{n\in N}$ géométrique telle que $v_4 = -48$ et $v_8 = -768$
a) $v_8 = v_4 q^4 \Leftrightarrow q^4 = 16 = 2^4 \Leftrightarrow q = 2 \text{ ou } q = -2$
b) $v_4 = v_0 q^4 \Leftrightarrow v_0 = \frac{-48}{q^4} = -3$ car pour $q = 2$ ou $q = -2$, $q^4 = 16$
c) Pour $q = 2$, Pour tout entier naturel n, $v_n = -3 \times 2^n$
Pour $q = -2$, Pour tout entier naturel n, $v_n = -3 \times (-2)^n$

Exercice 7 :
Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 35 + 32 + 29 + \cdots + (-268)$$

$$S_2 = \frac{2}{27} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} + 2 + 6 + \cdots + 81$$

Correction

$$S_1 = 35 + 32 + 29 + \cdots + (-268)$$

Il s'agit des termes d'une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 35$
On cherche n tel que $u_n = -268$
Pour tout entier naturel n , $u_n = 35 - 3n$
$35 - 3n = -268 \Leftrightarrow n = 101$
$S_1 = 35 + 32 + 29 + \cdots + (-268) = u_0 + u_1 + \cdots + u_{101} = \frac{u_0 + u_{101}}{2} \times 102 = -11\,883$

$$S_2 = \frac{2}{27} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} + 2 + 6 + \cdots + 162$$

Il s'agit des termes d'une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = \frac{2}{27}$
On cherche n tel que $u_n = 162$
Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2}{27} \times 3^n$
$\frac{2}{27} \times 3^n = 162 \Leftrightarrow 3^n = 162 \times \frac{27}{2} \Leftrightarrow n = 7$
$S_2 = \frac{2}{27} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} + 2 + 6 + \cdots + 162 = u_0 + u_1 + \cdots + u_7 = u_0 \times \frac{1-q^8}{1-q} = -\frac{1}{27}(1 - 3^8) = \frac{6560}{27}$

Exercice 8 :
Aujourd'hui les chardons (une plante vivace) ont envahi 300 m² des champs d'une région. Chaque semaine, la surface envahie augmente de 5 % par le développement des racines, auquel s'ajoutent 15 m² suite à la dissémination des graines.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la surface envahie par les chardons, en m², après n semaines ; on a donc $u_0 = 300$ m².

1) a. Calculer u_1 et u_2.
b. Montrer que la suite (u_n) ainsi définie, n'est ni arithmétique ni géométrique.

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 15$.
2) On considère la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n + 300$.
a. Calculer v_0, puis montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme de cette suite.
b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n, puis u_n.
3) Est-il correct d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé au bout de 8 semaines ? Justifier la réponse.

Correction
1)a) $u_1 = 1{,}05 \times 300 + 15 = 330$
$u_2 = 1{,}05 \times 330 + 15 = 361{,}5$

b) $u_1 - u_0 = 30$; $u_2 - u_1 = 31{,}5$ donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.
$\frac{u_1}{u_0} = \frac{330}{300} = \frac{11}{10}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{361{,}5}{330} = \frac{241}{220}$ Donc la suite (v_n) n'est pas géométrique
2) $v_0 = u_0 + 300 = 600$
Pour tout entier naturel n,
$v_{n+1} = u_{n+1} + 300 = 1{,}05u_n + 15 + 300 = 1{,}05u_n + 315 = 1{,}05\left(u_n + \frac{315}{1{,}05}\right) = 1{,}05(u_n + 300) = 1{,}05v_n$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 1,05 et de premier terme $v_0 = 600$.
b) Pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 q^n = 600 \times 1{,}05^n$
Pour tout entier naturel n , $u_n = v_n - 300 = 600 \times 1{,}05^n - 300$
3) $u_8 = 600 \times 1{,}05^8 - 300 \approx 586 < 600$
Donc il n'est pas correct d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé au bout de 8 semaines.

Exercice 9 :
On considère la suite (u_n) modélisant le coût d'une assurance vélo au 1er janvier $2019 + n$ définie par $u_0 = 25$ et la relation $u_{n+1} = 0{,}8\, u_n + 10$
1) Compléter le programme Python qui donne la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

```
def S( ):
    u=
    S=
    for i in range (       ):
        u=
        S=
    return(S)
```

2) Compléter l'algorithme suivant pour qu'à la fin de l'algorithme, la variable n contienne l'indice du premier terme de la suite (u_n) strictement supérieur à 40.

$n \leftarrow 0$
$U \leftarrow 25$
…
$\quad n \leftarrow n + 1$
$\quad U \leftarrow 0{,}8U + 10$
Fin …

3) Ecrire cet algorithme en Python.

Correction
1)
```
def S(n):
    u=25
    S=25
    for i in range (1,n+1):
        u=0.8*u+10
        S=S+u
    return(S)
```

2)
$n \leftarrow 0$
$U \leftarrow 25$
$Tant\ que\ U \leq 40$
$\quad n \leftarrow n + 1$
$\quad U \leftarrow 0{,}8U + 10$
$Fin\ Tant\ que$

3)

```
def seuil():
    N=0
    u=25
    while u<=40:
        N=N+1
        u=0.8*u+10
    return(N)
```

On trouve $N = 5$ donc ce sera en 2024 que l'assurance coûtera pour la première fois plus de 40€.

Exercice 10 :
Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel par $v_{n+1} = v_n \times 2$.
Compléter la fonction **seuil** qui détermine le plus petit entier n pour lequel $v_n \geq A$.
Pourquoi ce programme va-t-il toujours s'arrêter ?

def seuil(A):
$n = \cdots$ ...
$v = \cdots$
.... :
$v = 2 \times v$
....
return n

Correction

```
def seuil(A):
    n=0
    v=3
    while v<A:
        v=2*v
        n=n+1
    return(n)
```

- **Probabilité**

– Probabilité conditionnelle d'un événement B sachant un événement A de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$. Indépendance de deux événements.
– Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme.
– Partition de l'univers (systèmes complets d'événements). Formule des probabilités totales.
– Succession de deux épreuves indépendantes. Représentation par un arbre ou un tableau.

- **Variables aléatoires**

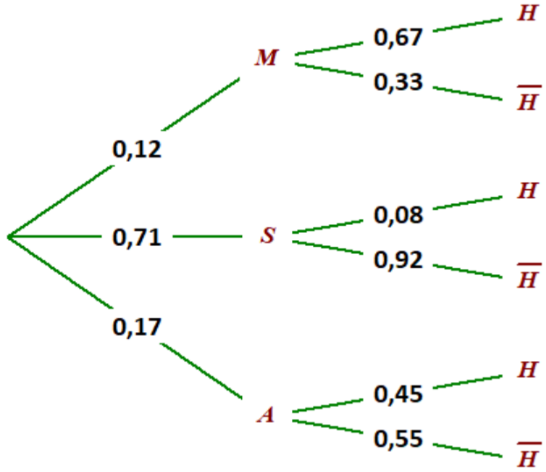
– Variable aléatoire réelle : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire ; formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles.
– Loi d'une variable aléatoire.
– Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire.

Exercice 1 :
Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégories : médecins, soignants non médecins et personnel administratif ou technique.
• 12% sont des médecins et 71% des soignants.
• 67% des médecins sont des hommes ; 92% des soignants sont des femmes et 45% des personnels administratifs ou techniques sont des hommes.
On tire au hasard la fiche représentant un membre du personnel de cet hôpital.
On note :

- M : « la fiche est celle d'un médecin »
- S : « la fiche est celle d'un soignant non médecin »
- A : « la fiche est celle d'un personnel administratif ou technique.
- H : « la fiche est celle d'un homme »

1) Construire un arbre pondéré illustrant cette situation.
2) Calculer la probabilité que la fiche choisie soit celle d'une femme.
3) Sachant que la fiche choisie est celle d'un homme, déterminer la probabilité que ce soit celle d'un soignant non médecin.

Correction
1) Construire un arbre pondéré illustrant cette situation.



2) Calculer la probabilité que la fiche choisie soit celle d'une femme.
M, S, A forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,
$p(\overline{H}) = p(M)p_M(\overline{H}) + p(S)p_S(\overline{H}) + p(A)p_A(\overline{H}) = 0{,}12 \times 0{,}33 + 0{,}71 \times 0{,}92 + 0{,}17 \times 0{,}55 = 0{,}7863$
3) Sachant que la fiche choisie est celle d'un homme, déterminer la probabilité que ce soit celle d'un soignant non médecin.

$$p(H) = 1 - p(\overline{H}) = 0{,}2137$$
$$p_H(S) = \frac{p(S \cap H)}{p(H)} = \frac{p(S)p_S(H)}{p(H)} = \frac{0{,}71 \times 0{,}08}{0{,}2137} \approx 0{,}266$$

Exercice 2 :
Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle :

- A : « l'appareil présente un défaut d'apparence » ;
- F : « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».

On suppose que les événements A et F sont indépendants. La probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0, 02 et la probabilité que l'appareil présente un défaut de fonctionnement est égale à 0,05.
1) Déterminer la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts.
2) Déterminer la probabilité que l'appareil ne présente aucun défaut.
Correction
1) Déterminer la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts.
$p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F) = p(A) + p(F) - p(A)p(F) = 0{,}02 + 0{,}05 - 0{,}02 \times 0{,}05 = 0{,}069$
car A et F sont indépendants
2) Déterminer la probabilité que l'appareil ne présente aucun défaut.
$$p(\bar{A} \cap \bar{F}) = p(\bar{A})p(\bar{F}) = \big(1 - p(A)\big)\big(1 - p(F)\big) = 0{,}98 \times 0{,}95 = 0{,}931$$
Exercice 3 :
Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.
1) On considère deux événements A et B tels que $p(A) = 0{,}3$, $p(B) = 0{,}6$ et $p(A \cap B) = 0{,}09$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2) On considère deux événements indépendants E et F tels que $p(\bar{F}) = 0{,}53$ et $p(E \cap F) = 0{,}25$. Calculer $p(E)$.
3) On considère deux événements indépendants C et D tels que $p(C) = 0{,}12$ et $p(D) = 0{,}65$. Déterminer $p_C(D)$ et $p_D(C)$.
4) On considère deux événements indépendants F et G tels que $p(F) = 0{,}11$ et $p(F \cup G) = 0{,}23$. Déterminer $p(G)$.

Correction
1)$p(A)p(B) = 0{,}18 \neq 0{,}9$ donc A et B ne sont pas indépendants.
2) $p(F) = 1 - p(\bar{F}) = 0{,}47$
$p(E) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{25}{47}$
3) $p_C(D) = p(D) = 0{,}65$ et $p_D(C) = p(C) = 0{,}12$ car C et D sont indépendants.
4) $p(F \cup G) = p(F) + p(G) - p(F \cap G) \Leftrightarrow p(F \cup G) = p(F) + p(G) - p(F)p(G)$ car $C = F$ et G sont indépendants.
$p(F \cup G) = p(F) + p(G) - p(F \cap G) \Leftrightarrow 0{,}23 = 0{,}11 + p(G) - 0{,}11p(G)$
$\Leftrightarrow 0{,}12 = 0{,}89p(G) \Leftrightarrow p(G) = \dfrac{12}{89}$

Exercice 4 :
La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	0,5	1	3	4	5
p_i	0,2	0,15	0,05	a	0,32	0,18

1) Déterminer la valeur de a.
2) Calculer $p(X > 1)$.
3) Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.

Correction
1) $p(X = -2) + p(X = 0{,}5) + p(X = 1) + p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) = 1 \Leftrightarrow 0{,}9 + a = 1 \Leftrightarrow$
$a = 0{,}1$
2) $p(X > 1) = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) = 0{,}6$
3) $E(X) = -2 \times 0{,}2 + 0{,}5 \times 0{,}15 + \cdots + 0{,}18 \times 5$

Exercice 5 :
Un joueur lance une fléchette sur une cible. Il atteint le rouge avec une probabilité de $\frac{1}{6}$, le vert avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et le jaune avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Il mise 2 euros. Il gagne 5 euros s'il atteint le rouge ; 1 euro s'il atteint le vert et rien s'il atteint le jaune. On appelle G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
1) Déterminer la loi de probabilités de G et déterminer son espérance.
2) Comment rendre le jeu équitable en modifiant la mise ?

Correction
G prend les valeurs 3 , -1 et -2 euros.

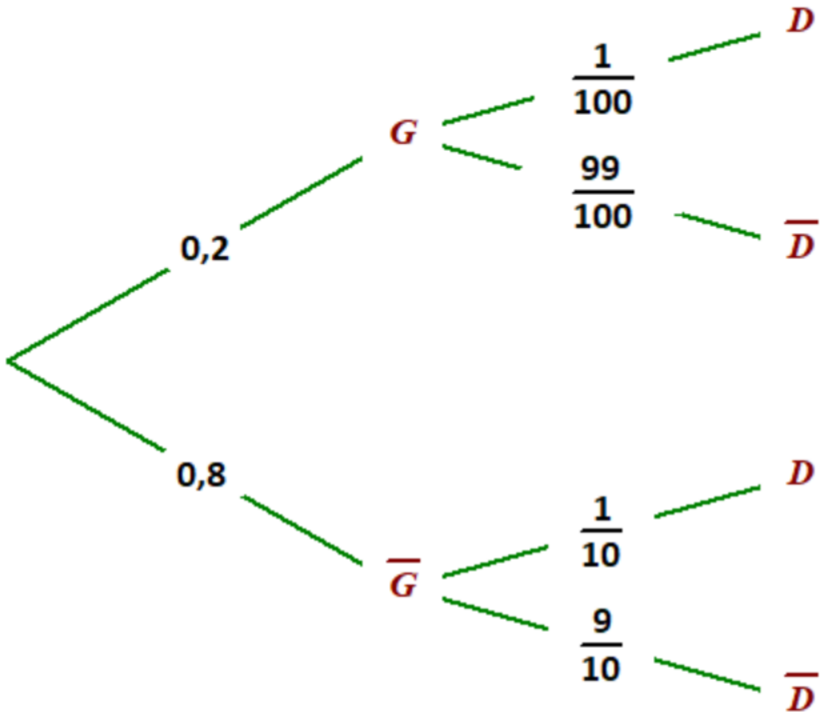
$$p(G = 3) = \frac{1}{6}$$
$$p(G = -1) = \frac{1}{3}$$
$$p(G = -2) = \frac{1}{2}$$
$$E(G) = 3 \times \frac{1}{6} - 1 \times \frac{1}{3} - 2 \times \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}$$

2) $E(G) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}(5 - m) + \frac{1}{3}(1 - m) + \frac{1}{2}(-m) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{6} - \frac{m}{6} + \frac{1}{3} - \frac{m}{3} - \frac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{6} - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{6}$

Exercice 6 :
Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20% des chaudières sont sous garantie. Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{100}$. Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{10}$.
On appelle G l'évènement suivant : « la chaudière est sous garantie » et D l'évènement suivant : « la chaudière est défectueuse ».

1. Faire un arbre de probabilités illustrant cette situation.
2. Déterminer la probabilité que la chaudière soit défectueuse.
3. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle soit sous garantie.
4. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse.
On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Déterminer son espérance mathématique de X et interpréter le résultat.

Correction



2. G et $\bar{G}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,
$$p(D) = p(G)p_G(D) + p(\bar{G})p_{\bar{G}}(D) = 0{,}2 \times \frac{1}{100} + 0{,}8 \times \frac{1}{10} = 0{,}082$$
3.
$$p_D(G) = \frac{p(G \cap D)}{p(D)} = \frac{p(G)p_G(D)}{p(D)}$$
4.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
$$p(X = 0) = 0{,}2$$
$$p(X = 80) = p(\bar{G} \cap D) = 0{,}08$$
$$p(X = 280) = p(\bar{G} \cap \bar{D}) = 0{,}8 \times \frac{99}{100} = 0{,}792$$
b)
$$E(X) = 0 \times 0{,}2 + 80 \times 0{,}08 + 280 \times 0{,}792$$

- **Trigonométrie**

– Cercle trigonométrique. Longueur d'arc. Radian.
– Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique. Image d'un nombre réel.
– Cosinus et sinus d'un nombre réel. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle. Valeurs remarquables.
– Fonctions cosinus et sinus. Parité, périodicité. Courbes représentatives

Exercice 1
Convertir 15° en radians et $\frac{5\pi}{8}$ en degrés.

Correction
$\frac{15\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$ et $\frac{\frac{5\pi}{8}\times 180}{\pi} = 112{,}5°$

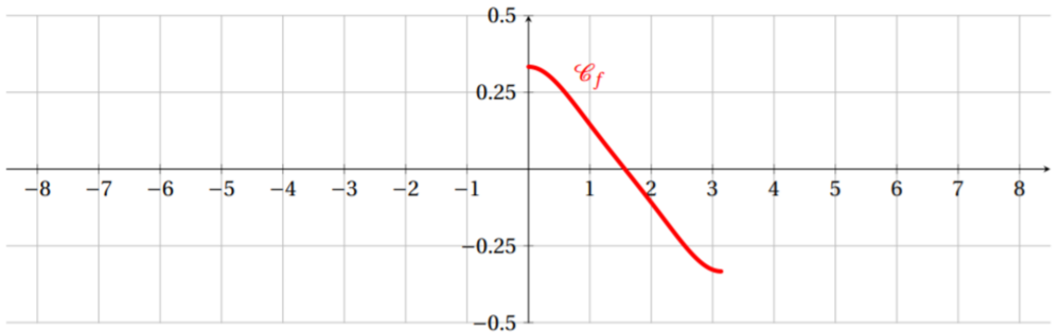
Exercice 2
Les nombres suivants sont-ils associés aux mêmes points sur le cercle trigonométrique ?
a) $\frac{139\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{301\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$

Correction
a) $\frac{139\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{138\pi}{6} = 23\pi$ donc il n'existe pas d'entier k tel que $23\pi = k \times 2\pi$ donc ils ne sont pas associés aux mêmes points sur le cercle trigonométrique.
b) $\frac{301\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{302\pi}{2} = 151\pi$ donc il n'existe pas d'entier k tel que $151\pi = k \times 2\pi$ donc ils ne sont pas associés aux mêmes points sur le cercle trigonométrique

Exercice 3
1) Déterminer le sinus et de cosinus de $-\frac{3\pi}{2}$.
2) Déterminer le sinus et de cosinus de $\frac{7\pi}{4}$.
3) Déterminer le sinus et de cosinus de $\frac{5\pi}{6}$.
4) Déterminer le sinus et de cosinus de 3π.

Correction
1) $cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ et $sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$
2) $cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
4) $cos\,(3\pi\ ) = -1$ et $sin\,(3\pi\ ) = 0$

Exercice 4
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\cos(x)}{3+\sin^2(x)}$.
1) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f est paire. Interpréter graphiquement.
3) Montrer que f est f est périodique de période 2π. Interpréter graphiquement.
4) En déduire le plus petit intervalle I possible pour étudier f.
5) Sur la page suivante, on donne C_f la représentation graphique de f sur I. Compléter sa représentation graphique sur $\mathbb{R}$.



Correction

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\cos(x)}{3+\sin^2(x)}$.

1) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

$$0 \leq sin^2(x) \leq 1$$

$$3 \leq 3 + \sin^2(x) \leq 4$$

Donc pour tout réel x, $3 + \sin^2(x) \neq 0$ donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est paire. Interpréter graphiquement.

$D_f = \mathbb{R}$ centré en 0.

Pour tout réel x , $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{3+\sin^2(-x)} = \frac{\cos(x)}{3+(-\sin(x))^2} = \frac{\cos(x)}{3+\sin^2(x)} = f(x)$

car pour tout réel x, $\cos(-x) = cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$

Donc f est paire.

3) Montrer que f est f est périodique de période 2π. Interpréter graphiquement.

Pour tout réel x , $f(x+2\pi) = \frac{\cos(x+2\pi)}{3+\sin^2(x+2\pi)} = f(x)$ car pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = cos(x)$

Et $\sin(x + 2\pi) = sin(x)$ donc f est périodique de période 2π.

4) En déduire le plus petit intervalle I possible pour étudier f.

- La fonction f étant périodique de période 2π, on peut restreindre son intervalle d'étude à un intervalle de longueur 2π, par exemple, $[-\pi; \pi]$.
- De plus, la fonction f est paire. On peut donc restreindre son intervalle d'étude à l'intervalle $[0; \pi]$.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin(2x)$.

1) Montrer que f est impaire.

2) Montrer que la fonction f est périodique de période π.

3) Expliquer pourquoi on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0; \frac{\pi}{2}]$?

4) Calculer $f(0), f\left(\frac{\pi}{12}\right), f\left(\frac{\pi}{8}\right), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{3}\right), f\left(\frac{3\pi}{8}\right), f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5) Tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi; 3\pi]$.

Correction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin(2x)$.

1) Montrer que f est impaire.

$D_f = \mathbb{R}$ centré en 0.

Pour tout réel x , $f(-x) = sin\big(2(-x)\big) = -sin(2x) = -f(x)$ car pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$

Donc f est impaire.

2) Montrer que la fonction f est périodique de période π.

Pour tout réel x , $f(x + \pi) = sin(2(x + \pi) = sin(2x + 2\pi) = \sin(2x) = f(x)$ car pour tout réel x, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ donc f est périodique de période π.

3) Expliquer pourquoi on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0; \frac{\pi}{2}]$?

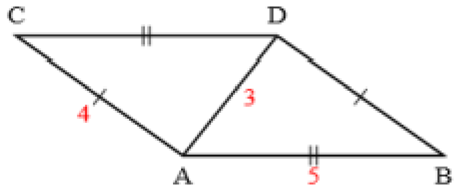
- La fonction f étant périodique de période π, on peut restreindre son intervalle d'étude à un intervalle de longueur π, par exemple, $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.
- De plus, la fonction f est impaire. On peut donc restreindre son intervalle d'étude à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

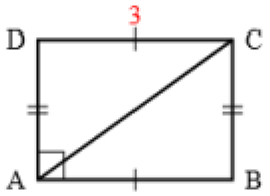
4) $f(0)=\sin(0)=0, f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}, f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\ f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\ f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\pi)=0$

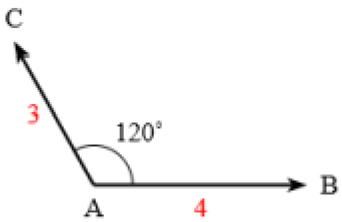
- **Produit scalaire**

– connaître la définition du produit scalaire
– propriétés et différentes expressions du produit scalaire

Exercice 1 :
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants.

1) 

3) 

2) 

4) 

Correction
1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{AB}\|^2-\|\overrightarrow{AC}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|^2-AB^2-AC^2\right)=\frac{1}{2}(AD^2-AB^2-AC^2)=\frac{1}{2}(3^2-5^2-4^2)=-16$
2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}=12\cos 120=-6$
3) B est le projeté orthogonal de C sur (AB) donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=9$
4) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AC=-6$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de sens contraire.

Exercice 2 :
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal, soient les points $A\ (6\ ;\ 3)$, $B(\ 0\ ;\ 4)$ et $C\ (-5\ ;\ -2\ )$.
1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2) En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré.

Correction
1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-11\\-5\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-6(-11)+1(-5)=61$
2) $AB=\sqrt{37}$ et $AC=\sqrt{146}$
$\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\frac{61}{\sqrt{37}\times\sqrt{146}}$ donc $\widehat{BAC}\approx 34°$.

Exercice 3 :

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal, soient $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-m+2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4m\\-m\end{pmatrix}$ où m est un nombre réel. Déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

Correction

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux$\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow 3(4m)+(-m+2)(-m)=0 \Leftrightarrow 12m+m^2-2m=0 \Leftrightarrow$
$m^2+10m=0 \Leftrightarrow m=0 \text{ ou } m=-10$

Exercice 4 :

On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $||\vec{u}\,||=3$, $||\vec{v}\,||=4$ et $\vec{u}.\vec{v}=-6$. Calculer chacune des expressions suivantes :

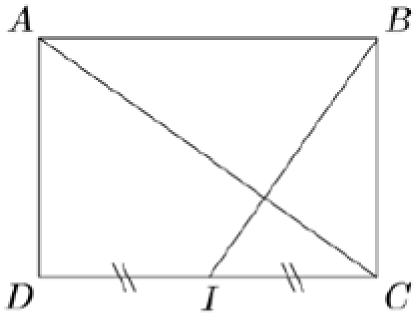
1) $(2\vec{u}+3\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$
2) $(\vec{u}-3\vec{v})^2$

Correction

$(2\vec{u}+3\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=2\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+3\vec{v}.\vec{u}-3\vec{v}^2=2\times||\vec{u}\,||^2+\vec{u}.\vec{v}-3||\vec{v}\,||^2=-36$
$(\vec{u}-3\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.(3\vec{v})+(3\vec{v})^2=||\vec{u}\,||^2-6\,\vec{u}.\vec{v}+9||\vec{v}\,||^2=189$

Exercice 5 :

Soit a un nombre réel positif. On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB=a$ et $AD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. On note I le milieu de $[CD]$. Démontrer que les droites (AC) et (BI) sont perpendiculaires.



Correction

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BI}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CI}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CI}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CI}=-AB\times CI=-\frac{a^2}{2}$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires de sens contraire.
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}=BC^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2=\frac{2}{4}a^2=\frac{1}{2}a^2$
$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CI}=0$ car $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont orthogonaux

Donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BI}=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$

- **Géométrie repérée**

– Vecteur normal à une droite. Le vecteur de coordonnées (a, b) est normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Le vecteur $(-b, a)$ en est un vecteur directeur.
– Équation de cercle.

Exercice 1

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A(2; 3)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}\binom{-2}{1}$.
2) On considère la droite d d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$ et le point $A(-1; 2)$.
a) Vérifier que le point A n'appartient pas à d.
b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite d.

Correction

1) $M(x; y) \in d \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux$\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow -2(x-2) + (y-3) = 0 \Leftrightarrow -2x + y + 1 = 0$
2)a) $4 \times (-1) - 5 \times 2 - 1 = -15 \neq 0$ donc le point A n'appartient pas à d.

b) On commence par déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par A perpendiculaire à d.
$\vec{u}\binom{5}{4}$ est un vecteur directeur de d et donc un vecteur normal de D.
$D: 5x + 4y + c = 0$
$A(-1; 2) \in d$ donc $5 \times (-1) + 4 \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -3$
Donc $D: 5x + 4y - 3 = 0$

Le point H est le point d'intersection des droites d et D.

$$\begin{cases} 4x - 5y - 1 = 0 \\ 5x + 4y - 3 = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} \times 5 \\ \times (-4) \end{matrix} \right| \begin{matrix} \times 4 \\ \times 5 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -25y - 16y - 5 + 12 = 0 \\ 16x + 25x - 4 - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{7}{41} \\ x = \dfrac{19}{41} \end{cases}$$

Donc $H(\frac{19}{41}; \frac{7}{41})$.

Exercice 2

1) Déterminer une équation cartésienne du cercle C de centre $B(-1 ; 1)$ et de rayon $\sqrt{26}$.
2) Les points $A(4; 2)$ et $D(0; 2)$ appartiennent-ils à C ?
3) Déterminer si l'équation suivante est l'équation d'un cercle :
a) $x^2 + y^2 + 2x - 20y + 76 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 10 = 0$

Correction

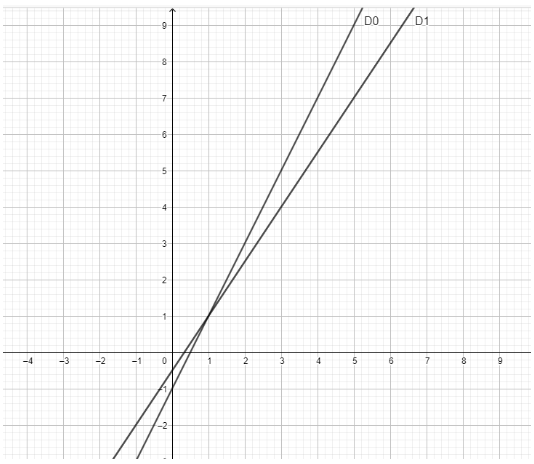
1) $C: (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 26$
2) $(4 + 1)^2 + (2 - 1)^2 = 26$ donc $A \in C$
$(0 + 1)^2 + (2 - 1)^2 = 2$ donc $D \notin C$
3) a) $x^2 + y^2 + 2x - 20y + 76 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 10)^2 - 1 - 100 + 76 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 10)^2 = 25$
donc il s'agit d'un cercle de centre $A(-1; 10)$ et de rayon 5.
b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 4 - 1 + 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = -5 < 0$ donc cette équation n'est pas l'équation d'un cercle, il s'agit de l'ensemble vide.

Exercice 3:
On considère l'ensemble (D_m) des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient :
$(m+2)x-(m+1)y-1=0$, avec $m \in \mathbb{R}$.

1) Justifier que pour toute valeur de m, l'ensemble (D_m) est une droite
2) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la droite (D_m) est parallèle aux axes du repère
3) Tracer (D_0), (D_1)
4) Montrer que les droites (D_m) passent par un point fixe dont on précisera les coordonnées

Correction

1) Pour tout m réel, on n'a pas simultanément $m+2=0$ et $m+1=0$ donc l'ensemble (D_m) est une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec $a=m+2, b=-(m+1)$ et $c=-1$
2) (D_m) est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $a=m+2=0$ donc si et seulement si $m=-2$
   (D_m) est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si $b=-m-1=0$ donc si et seulement si $m=-1$
3)

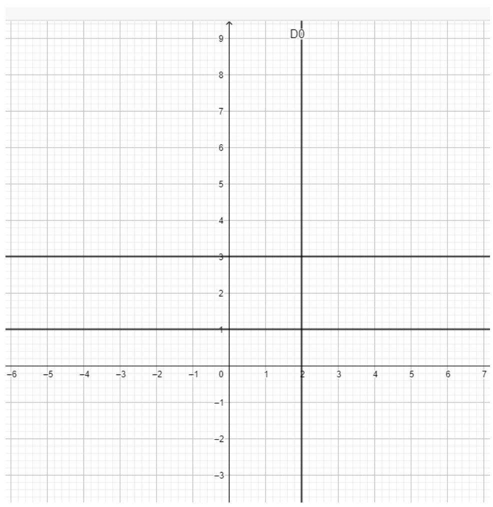


4) Graphiquement, il semble que $I(1\,;1)$ soit le point d'intersection de (D_0)et (D_1). Vérifions que I appartient à toutes les droites (D_m) :
   $(m+2)\times 1-(m+1)\times 1-1=m+2-m-1-1=0$ donc les droites (D_m) passent par un point fixe $I(1\,;1)$

Exercice 4:
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la droite D_λ d'équation cartésienne : $(1-\lambda^2)x+2\lambda y=4\lambda+2$
Montrer qu'il existe un point M_0 équidistant de toutes les droites D_λ

Exercice 4:
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la droite D_λ d'équation cartésienne : $(1-\lambda^2)x+2\lambda y=4\lambda+2$
Montrer qu'il existe un point M_0 équidistant de toutes les droites D_λ

Correction



D_0 a pour équation cartésienne : $x=2$
D_1 a pour équation cartésienne : $2y=6$ soit $y=3$
D_{-1} a pour équation cartésienne : $-2y=-2$ soit $y=1$

Puisque D_1et D_{-1} sont parallèles, si M_0 existe, il est équidistant de ces deux droites parallèles, donc il appartient à la droite d'équation $y=2$.
Alors $M_0(x_0; 2)$ et $d(M_o, D_1)=\ldots=d(M_o, D_{-1})=\ldots=1$
Pour que M_0 soit équidistant de toutes les droites D_λ il faut en particulier que $d(M_o, D_0)=d(M_o, D_1)=1$
Or $d(M_o, D_0)=1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x_0=1$
On considère donc le point $M_0(1; 2)$

Vérifions maintenant que $d(M_o, D_\lambda)$ =1:
Soit $H(x; y)$ le projeté orthogonal de M_0 sur (D_λ) dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u_\lambda}(-2\lambda;\ 1-\lambda^2)$
$\overrightarrow{M_0H}(x-1; y-2)$ et $\overrightarrow{u_\lambda}$ sont orthogonaux si et seulement si $-2\lambda(x-1)+(1-\lambda^2)(y-2)=0$.
Comme de plus H appartient à (D_λ), trouver les coordonnées de H équivaut à résoudre le système:

$$\begin{cases} (1-\lambda^2)x+2\lambda y = 4\lambda+2 \\ -2\lambda(x-1)+(1-\lambda^2)(y-2)=0 \end{cases}$$

Et $d(M_o, D_\lambda)^2 = (x-1)^2+(y-2)^2$

Si $\lambda \neq 0$:

$$-2\lambda(x-1)+(1-\lambda^2)(y-2)=0 \Leftrightarrow x-1=\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}(y-2)$$

Alors $(1-\lambda^2)x+2\lambda y = 4\lambda+2 \Leftrightarrow (1-\lambda^2)x+2\lambda y - (1-\lambda^2) = 4\lambda+2-(1-\lambda^2)$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda^2)(x-1)+2\lambda y = \lambda^2+4\lambda+1$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda^2)\times\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\times(y-2)+2\lambda y=\lambda^2+4\lambda+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\lambda^2)^2}{2\lambda}\times(y-2)+2\lambda y-4\lambda=\lambda^2+4\lambda+1-4\lambda$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{(1-\lambda^2)^2}{2\lambda}+2\lambda\right)\times(y-2)=\lambda^2+1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{(1-\lambda^2)^2+4\lambda^2}{2\lambda}\right)\times(y-2)=\lambda^2+1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+2\lambda^2+\lambda^4}{2\lambda}\right)\times(y-2)=\lambda^2+1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{(\lambda^2+1)^2}{2\lambda}\right)\times(y-2)=\lambda^2+1$$

$$\Leftrightarrow (y-2)=\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$$

Alors $x-1=\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}(y-2)=\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\times\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}=\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$

$$d(M_o, D_\lambda)^2=(x-1)^2+(y-2)^2=\left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2+\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^2=\frac{1-2\lambda^2+\lambda^4+4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}$$

$$d(M_o, D_\lambda)^2=\frac{1+2\lambda^2+\lambda^4}{(1+\lambda^2)^2}=\frac{(1+\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}=1$$

Finalement, $d(M_o, D_\lambda)=1$ donc $M_0(1;2)$ est le point équidistant de toutes les droites D_λ et $d(M_o, D_\lambda)=1$