Préparer la spécialité mathématiques en terminale

Pour réussir en spécialité mathématiques en terminale Des éléments de correction sont disponibles sur le site du lycée.

Second degré

• *Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.*
• *Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle.*
• *Résolution d'une équation du second degré. Signe.*

Exercice 1

Donner, dans chacun des cas suivants, la forme canonique des expressions :

1. $A(x) = x^2 - 8x + 1$;
2. $B(x) = x^2 + 6x - 3$;
3. $C(x) = 3x^2 - 3x + 6$;
4. $D(x) = -2x^2 - 5x - 3$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $-6x^2 + 2x + 4 = 0$;
2. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$;
3. $x^2 - 2x + 5 = (x-5)(2x-1)$;
4. $\dfrac{-2}{x+2} = \dfrac{3}{x-1}$.

Exercice 3

Étudier, suivant les valeurs de x le signe de :

1. $A(x) = -5x^2 + 26x - 5$;
2. $B(x) = -3x^2 + 2x - 3$;
3. $C(x) = 4x^2 - 12x + 9$;
4. $D(x) = (1-x)(x^2 - x + 6)$.

Exercice 4

1. On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 + x^2 - 2$.
   (a) Montrer que 1 est racine de P.
   (b) Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout nombre réel x, $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
   (c) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
2. On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ et par $g(x) = \frac{1}{x+1}$.
   On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives. En utilisant la question précédente, étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 4

Trouver 3 entiers naturels consécutifs dont la somme des carrés est égale 245.

Exercice 4

Fonctions, dérivation

• *Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point.*
Équation : la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
• *Fonction dérivée des fonctions carré, cube, inverse, racine carrée. Pour n dans $\mathbb{Z}$, fonction dérivée de la fonction $x \longmapsto x^n$.*
• *Opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient, fonction dérivée de $x \longmapsto g(ax + b)$.*
• *Fonction valeur absolue : courbe représentative, étude de la dérivabilité en 0.*
• *Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée ; caractérisation des fonctions constantes.*
• *Nombre dérivé en un extremum, tangente à la courbe représentative.*

Exercice 1

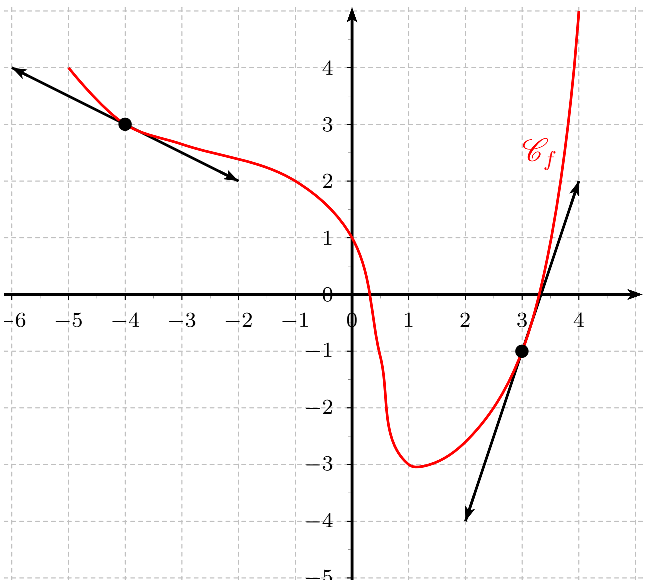
Préciser sur quels intervalles les fonctions ci-dessous sont dérivables, puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -3x^5 + x^4 - \frac{2}{x^3}$;
2. $f(x) = (2x - 5)(3x^2 + 7)$;
3. $f(x) = \dfrac{3}{2x^2 + 7}$;
4. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{-5x + 7}$;
5. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 5}{7x^2 + 1}$;
6. $f(x) = \sqrt{2x - 8}$;
7. $f(x) = \sqrt{-x + 8}$;
8. $f(x) = (-x + 8)^9$.

Exercice 2

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique, déterminer $f'(-4)$ et $f'(3)$.
2. En déduire l'équation réduite des tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses -4 et 3.



Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 à la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Étudier la position relative de T_{-1} et de la courbe $\mathscr{C}_f$.
3. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?

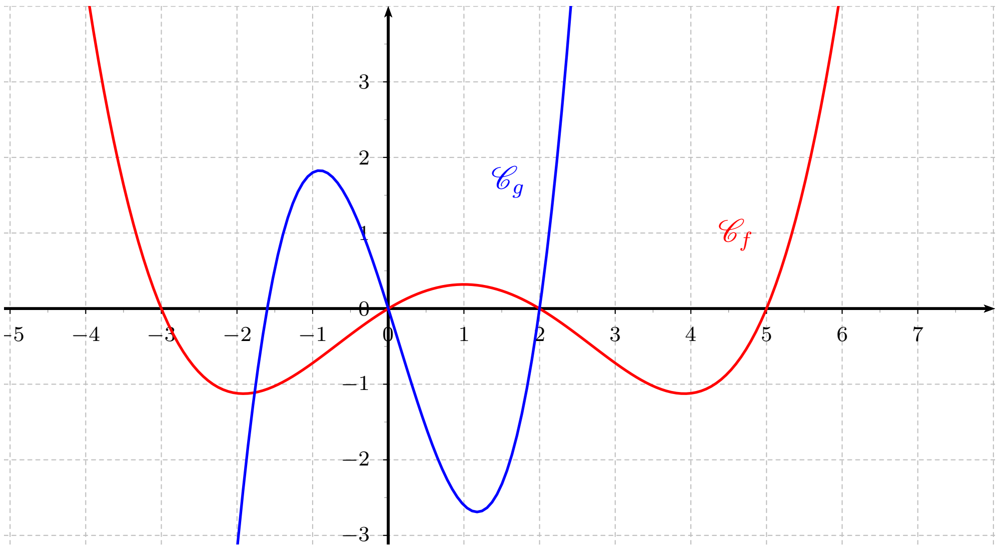
Exercice 4

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = x^4 - 4x^2 - 2x + 1$.
On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g.

1. Déterminer pour tout réel x, la dérivée $g'(x)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ avec la tangente T.
   Indication : pour tout réel x, $g(x) - (-2x + 1) = x^2(x^2 - 4)$.

Exercice 5

On a représenté ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctins f et g dérivables sur $\mathbb{R}$.



Parmi les tableaux de signes suivants, quel est celui de f' et celui de g' ?

x	$-\infty$		-2		0		5		$+\infty$
S_1		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

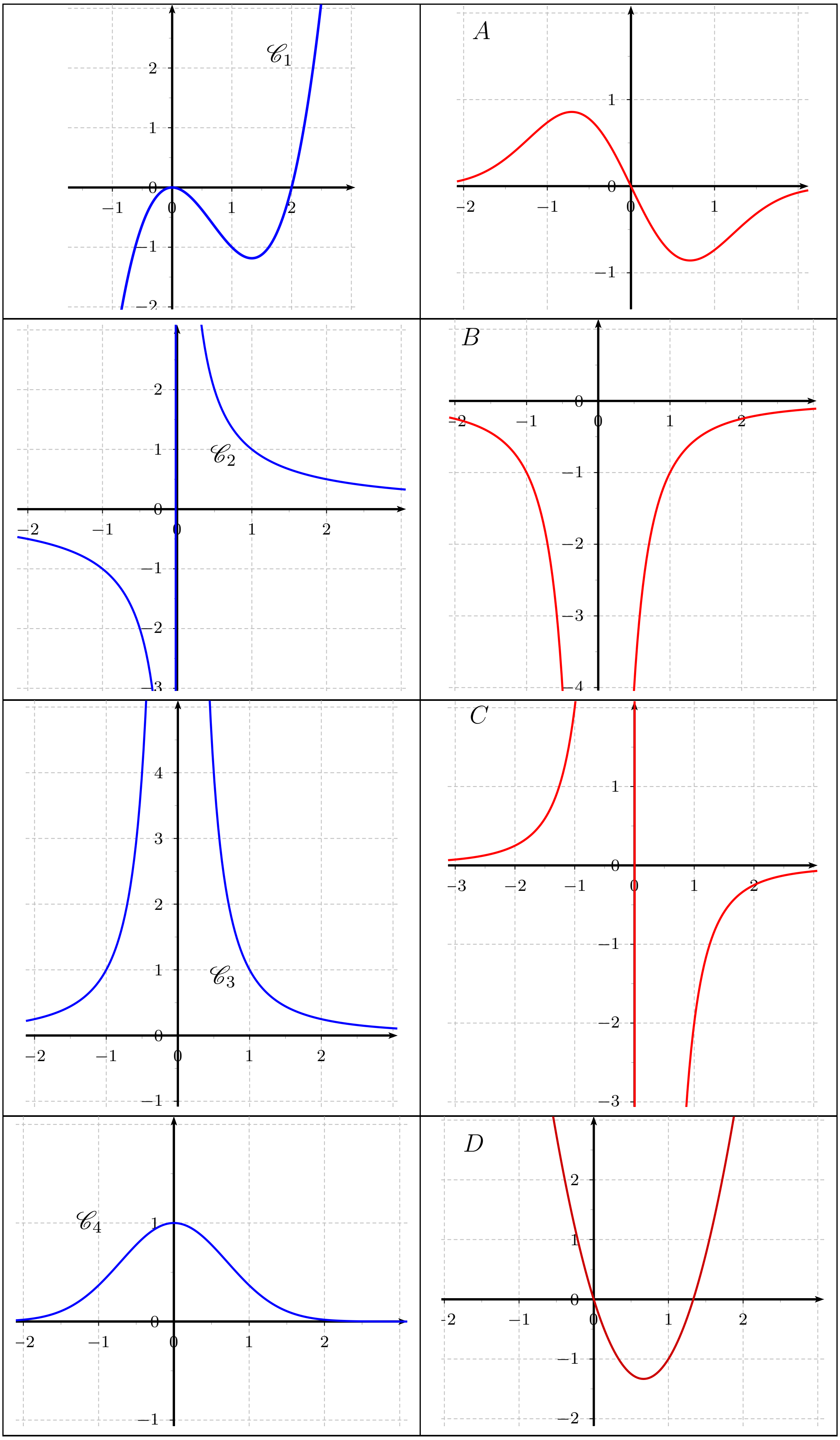
x	$-\infty$		-1		1.2		$+\infty$
S_2		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
S_3		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
S_4		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 6

On donne les courbes de quatre fonctions à gauche et celles de leurs dérivées à droite.
Associer chaque fonction à sa dérivée. Justifier.



Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10$.
Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5x+3}{x^2-x+1}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Montrer que la dérivée de la fonction f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f'(x) = \frac{-5x^2 - 6x + 8}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5.

Exercice 9

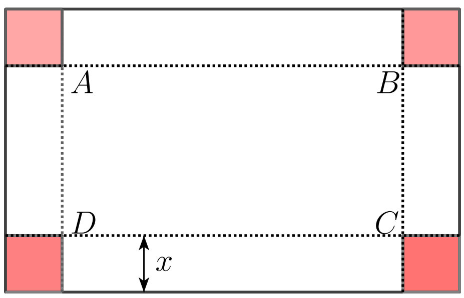
Une entreprise produit et vend un nouveau parfum. Les ventes s'envolent et l'entreprise s'intéresse au bénéfice quotidien maximum.
Utiliser les différentes informations pour calculer le bénéfice quotidien maximum.

La recette quotidienne :
La recette quotidienne de l'entreprise, en milliers d'euros est modélisée par la fonction définie sur $[0\ ;\ 10]$ par : $R(x) = -x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 10x$ où x est la quantité en centaines de litres de parfum vendue en un jour.

Coûts fixes :
Les coûts fixes journaliers de l'entreprise s'élèvent à 2 000 euros.
On donne : $-4x^3 + 18x^2 - 24x + 10 = -2(x-1)^2(2x-5)$

Exercice 10

On dispose une feuille de carton rectangulaire de 80 cm de long et 50 cm de large, avec laquelle on veut fabriquer une boîte ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour cela, on découpe dans la feuille quatre carrés égaux, aux quatre coins, puis on plie le carton suivant les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. On appelle x la mesure, en cm, de côté de chaque carré découpé.



Déterminer la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte sera maximum.

Indication : On note $V(x)$ le volume de la boîte obtenue.
On a alors : $V(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$.

Fonction exponentielle

• *Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.*
• *Propriétés algébriques de la fonction exponentielle. Notation e^x.*
• *Signe, sens de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle.*

Exercice 1

1. Simplifier l'écriture des nombres suivants :

   (a) $A = \dfrac{\mathrm{e}^7 \times \mathrm{e}^{-4}}{\mathrm{e}^{-5}}$ (b) $B = (\mathrm{e}^5)^{-6} \times \mathrm{e}^{-3}$, (c) $C = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{-3})^2} + \dfrac{\mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^{-5}}$

2. Soit x un nombre réel, simplifier l'écriture des nombres suivants :

   (a) $A(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x-3} \times \mathrm{e}^{-4x}}{\mathrm{e}^{-3x+3}}$,
   (b) $B = \dfrac{(\mathrm{e}^{2x})^3}{\mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-x+1}}$,
   (c) $C(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1+x}}{\mathrm{e}^{x+2}}$,
   (d) $D(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^{-x}}\right)^4$.

3. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2$ est constante.
4. Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

   (a) $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$; (b) $h(x) = \mathrm{e}^{-3x+5} - \mathrm{e}^x - 6x$.

5. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

   (a) $\mathrm{e}^{-3x+2} - 1 \geqslant 0$; (b) $\mathrm{e}^{x^2-3} - \mathrm{e}^{-2x} = 0$.

6. Étudier les variations des fonctions k et l définies sur $\mathbb{R}$ par :

   (a) $k(x) = 3\mathrm{e}^x - 3x$; (b) $l(x) = 4\mathrm{e}^{-3x+2}$.

7. Déterminer l'équation réduite de la tangente en 0 à la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Exercice 2

Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2 000 litres de produit par semaine. Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par : $R(x) = (5x - 30)\mathrm{e}^{-0.25x}$, pour tout réel $x \in [2\ ;\ 20]$

1. Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.
2. Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).
3. Résoudre l'inéquation $R(x) \geqslant 0$, d'inconnue x. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
4. On note R' la dérivée de la fonction R.
   Déterminer la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \mathrm{e}^3\mathrm{e}^4$;
2. $B = \mathrm{e}^{-4}\mathrm{e}^4$;
3. $C = \dfrac{\mathrm{e}^{-3}\mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^{-2}}$;
4. $D = \left(\mathrm{e}^4\right)^3\mathrm{e}^4$;
5. $E = \left(\mathrm{e}^3\right)^{-2}\mathrm{e}^5$;
6. $F = \dfrac{\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}} - 1}$.

Exercice 4

Résoudre les équation suivantes :

1. $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}$;
2. $\mathrm{e}^{-x} = 1$;
3. $\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}$;
4. $\mathrm{e}^{x+x^2} = 1$;
5. $\mathrm{e}^{x^2+5} = \left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2$;
6. $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 0$;
7. $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 0$;
8. $\mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^{-2x+3}$;
9. $\mathrm{e}^{2x} - 1 = 0$;
10. $x\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{2x} = 0$.

Exercice 5

1. Déterminer les racines du polynôme $P(X) = X^2 + 4X - 5$.
2. En déduire les solutions de l'équation $\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x = 5$.
3. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2 = 0$;
   (b) $\mathrm{e}^{2x+1} + \mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e} = 0$;
   (c) $\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$.

Exercice 6

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x - 1} > 0$;
2. $-\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 2 > 0$;
3. $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 3 \geqslant 0$;
4. $\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 2 < 0$

Exercice 7

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $f(x)$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer, dans chacun des cas suivants, une expression de $f'(x)$.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$;
2. $f(x) = \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$;
3. $f(x) = x\mathrm{e}^{x+1}$;
4. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x+1}$;
5. $f(x) = (x^2 + 1)\mathrm{e}^{3x+1}$;
6. $f(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^x}$;
7. $f(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{2x}}$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5]$, ayant pour expression $f(x) = (x - 5)\mathrm{e}^{0.2x} + 5$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 5]$.
3. Déterminer la valeur exacte du coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Suites numériques

• *Exemples de modes de génération d'une suite : explicite $u_n = f(n)$, par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, par un algorithme ou par des motifs géométriques.*
• *Suites arithmétiques : exemples, définition, calcul du terme général. Somme de termes consécutifs. Calcul de $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$.*
• *Suites géométriques : exemples, définition, calcul du terme général. Somme de termes consécutifs.*
• *Sens de variation d'une suite. Sens de variation d'une suite.*
• *Sur des exemples, introduction intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite.*

Exercice 1

Étudier le sens de variations de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$;
2. $u_n = 3n - 5$ pour $n \in \mathbb{N}$;
3. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$;
4. $u_n = \sqrt{n}$; pour $n \in \mathbb{N}$;
5. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$;
6. $u_n = \dfrac{5^n}{3^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier le sens de variations de (u_n).
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n \leqslant 1$.

Exercice 3

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \dfrac{2}{1+u_n} \end{cases}.$$

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation de cette suite et sa limite éventuelle.
2. Calculer u_1 et u_2. Cette suite est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
3. On admet que u est positive et on considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par

$$v_n = 1 - \frac{3}{u_n + 2}.$$

   (a) Calculer les premiers termes de v puis conjecturer la nature de la suite v.
   Démontrer cette conjecture.
   (b) En déduire une expression de v_n en fonction de n.
   (c) Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{3}{1 - v_n} - 2.$$

   En déduire une expression de v_n en fonction de n.

Exercice 4

Un magasin multimédia vend des ordinateurs et des tablettes numériques à des entreprises.
En 2017, il a vendu 250 000 ordinateurs et 54 000 tablettes. Il estime que les ventes d'ordinateurs diminuent de 6% chaque année, alors que les ventes de tablettes progressent en moyenne de 8% d'une année sur l'autre.
Pour tout entier naturel n, on note respectivement a_n et b_n les ventes d'ordinateurs et de tablettes en $2017 + n$.

1. Calculer le nombre d'ordinateurs et de tablettes vendus en 2018, puis en 2019.
2. Exprimer pour tout entier naturel n, a_{n+1} en fonction de a_n, puis b_{n+1} en fonction de b_n.
3. En déduire la nature des deux suites.
4. Calculer le nombre d'ordinateurs et de tablettes vendus aux entreprises en 2025.
5. Écrire un algorithme qui permet de savoir en quelle année les ventes de tablettes dépasseront celles des ordinateurs. Donner l'année obtenue.

Exercice 5

Déterminer si les suites u, v et w définies pour tout entier naturel n sont arithmétiques ou géométriques.
Si oui, préciser le premier terme et la raison de la suite.

1. $u_n = -4(n-4)+3$;
2. $v_n = \dfrac{1}{n^2+1}$;
3. $w_n = 4 \times 5n + 3$.

Exercice 6

1. On considère la suite arithmétique u telle que $u_{14} = 12$ et $u_{20} = 0$.
   (a) Déterminer la raison de cette suite.
   (b) Déterminer le premier terme de cette suite.
   (c) En déduire l'expression du terme u_n en fonction de la valeur n.
2. On considère la suite v géométrique telle que $v_4 = -48$ et $v_8 = -768$.
   (a) Déterminer la raison de cette suite.
   (b) Déterminer le premier terme de cette suite.
   (c) En déduire l'expression du terme v_n en fonction de la valeur n.

Exercice 7

Calculer les sommes suivantes :
$S_1 = 35 + 32 + 29 + \cdots + (-268)$; et $S_2 = \dfrac{2}{27} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{3} + 2 + 6 + \cdots + 81$.

Exercice 8

Aujourd'hui les chardons (une plante vivace) ont envahi 300 m^2 des champs d'une région.
Chaque semaine, la surface envahie augmente de 5 % par le développement des racines, auquel s'ajoutent 15 m^2 suite à la dissémination des graines.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la surface envahie par les chardons, en m^2, après n semaines ; on a donc $u_0 = 300$ m^2.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.

(b) Montrer que la suite (u_n) ainsi définie, n'est ni arithmétique ni géométrique.

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,05u_n + 15$.

2. On considère la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n,, par : $v_n = u_n + 300$.

   (a) Calculer v_0, puis montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme de cette suite.

   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

3. Est-il correct d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé au bout de 8 semaines ? Justifier la réponse.

EXERCICE 9

On considère la suite (u_n) modélisant le coût d'une assurance vélo au 1^{er} janvier $2019+n$ définie par $u_0 = 25$ et la relation $u_{n+1} = 0.8u_n + 10$.

1. Compléter le programme Python qui donne la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

```
def S( ):
    u=
    S=
    for i in range (  ):
        u=
        S=
    return(S)
```

2. Compléter l'algorithme suivant pour qu'à la fin de l'algorithme, la variable n contienne l'indice du premier terme de la suite (u_n) strictement supérieur à 40.

$n \leftarrow 0$
$U \leftarrow 25$
$\cdots$
$n \leftarrow n+1$
$U \leftarrow 0.8U + 10$
$Fin \cdots$

3. Écrire cet algorithme en Python.

EXERCICE 10

Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, par $v_{n+1} = 2 \times v_n$.
Compléter la fonction **seuil** qui détermine le plus petit entier naturel n tel que $v_n \geqslant A$.

```
def seuil(A):
    n=...
    v=...
    .....................:
        v=2*v
        .........................
    return(n)
```

Pourquoi ce programme va-t-il toujours s'arrêter ?

Probabilité et Variables aléatoires

• *Probabilité. conditionnelle d'un événement B sachant un événement A de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$. Indépendance de deux événements.*
• *Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme.*
• *Partition de l'univers (systèmes complets d'événements). Formule des probabilités totales.*
• *Succession de deux épreuves indépendantes. Représentation par un arbre ou un tableau.*
• *Variable aléatoire réelle : modélisation du résultat numérique d'une expérience aléatoire ; formalisation comme fonction définie sur l'univers et à valeurs réelles.*
• *Loi d'une variable aléatoire.*
• *Espérance, variance, écart-type Espérance, variance, écart type d'une variable aléatoire.*

Exercice 1

Le personnel d'un hôpital est réparti en trois catégories : médecins, soignants non médecins et personnel administratif ou technique.
• 12% sont des médecins et 71% des soignants.
• 67% des médecins sont des hommes ; 92% des soignants sont des femmes et 45% des personnels administratifs ou techniques sont des hommes.
On tire au hasard la fiche représentant un membre du personnel de cet hôpital. On note :
M : « la fiche est celle d'un médecin » ; S : « la fiche est celle d'un soignant non médecin » ;
A : « la fiche est celle d'un personnel administratif ou technique » ; H : « la fiche est celle d'un homme ».

1. Construire un arbre pondéré illustrant cette situation.
2. Calculer la probabilité que la fiche choisie soit celle d'une femme.
3. Sachant que la fiche choisie est celle d'un homme, déterminer la probabilité que ce soit celle d'un soignant non médecin.

Exercice 2

Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts. On appelle :
A : « l'appareil présente un défaut d'apparence » ;
F : « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
On suppose que les événements A et F sont indépendants. La probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à $0,02$ et la probabilité que l'appareil présente un défaut de fonctionnement est égale à $0,05$.

1. Déterminer la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts.
2. Déterminer la probabilité que l'appareil ne présente aucun défaut.

Exercice 3

Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère deux événements A et B tels que $p(A) = 0,3$, $p(B) = 0,6$ et $p(A \cap B) = 0,09$.
Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. On considère deux événements indépendants E et F tels que $p(\overline{F}) = 0,53$ et $p(E \cap F) = 0,25$.
Calculer $p(E)$.
3. On considère deux événements indépendants C et D tels que $p(C) = 0,12$ et $p(D) = 0,65$.
Déterminer $p_C(D)$ et $p_D(C)$.
4. On considère deux événements indépendants F et G tels que $p(F) = 0,11$ et $p(E \cup G) = 0,23$.
Déterminer $p(G)$.

Exercice 4

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	0.5	1	3	4	5
p_i	0.2	0.15	0.05	a	0.32	0.18

1. Déterminer la valeur de a.
2. Calculer $p(X > 1)$.
3. Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.

Exercice 5

Un joueur lance une fléchette sur une cible. Il atteint le rouge avec une probabilité de $\frac{1}{6}$, le vert avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et le jaune avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Il mise 2 euros. Il gagne 5 euros s'il atteint le rouge ; 1 euro s'il atteint le vert et rien s'il atteint le jaune. On appelle G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilités de G et déterminer son espérance.
2. Comment rendre le jeu équitable en modifiant la mise ?

Exercice 6

Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20% des chaudières sont sous garantie. Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{100}$. Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{10}$.
On appelle G et D les évènements suivants :
G : « la chaudière est sous garantie »et
D : « la chaudière est défectueuse ».

1. Faire un arbre de probabilités illustrant cette situation.
2. Déterminer la probabilité que la chaudière soit défectueuse.
3. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle soit sous garantie.
4. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse. On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle dune chaudière.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Déterminer son espérance mathématique de X et interpréter le résultat.

Trigonométrie

- *Cercle trigonométrique. Longueur d'arc. Radian.*
- *Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique. Image d'un nombre réel.*
- *Cosinus et sinus d'un nombre réel. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle. Valeurs remarquables.*
- *Fonctions cosinus et sinus. Parité, périodicité. Courbes représentatives.*

Exercice 1

Convertir 15° en radians et $\dfrac{5\pi}{8}$ en degrés.

Exercice 2

Les nombres suivants sont-ils associés aux mêmes points sur le cercle trigonométrique ?

a. $\dfrac{139\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$

b. $\dfrac{301\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}$;

Exercice 3

1. Déterminer le sinus et de cosinus de $-\dfrac{3\pi}{2}$.
2. Déterminer le sinus et de cosinus de $\dfrac{7\pi}{4}$.
3. Déterminer le sinus et de cosinus de $\dfrac{5\pi}{6}$.
4. Déterminer le sinus et de cosinus de 3π.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{3 + \sin^2(x)}$.

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est paire. Interpréter graphiquement.
3. Montrer que f est périodique de période 2π.
   Interpréter graphiquement.
4. En déduire le plus petit intervalle I possible pour étudier f.
5. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f sur I puis compléter sa représentation graphique sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$.

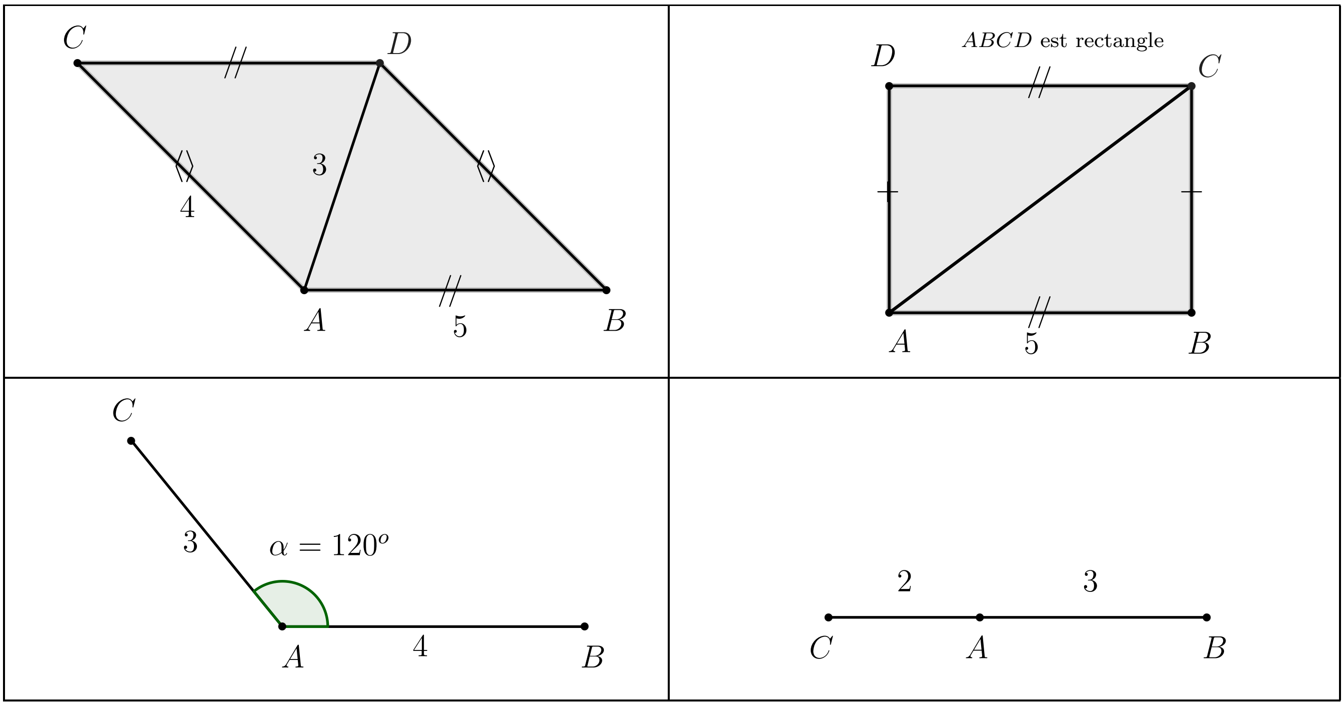
1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que la fonction f est périodique de période π.
3. Expliquer pourquoi on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}]$?
4. Calculer $f(0)$, $f(\dfrac{\pi}{12})$, $f(\dfrac{\pi}{8})$, $f(\dfrac{\pi}{6})$, $f(\dfrac{\pi}{4})$, $f(\dfrac{\pi}{3})$, $f(\dfrac{3\pi}{8})$, $f(\dfrac{5\pi}{12})$ et $f(\dfrac{\pi}{2})$.
5. Tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi\ ;\ 3\pi]$.

Produit scalaire

- *Connaître la définition du produit scalaire.*
- *Propriétés et différentes expressions du produit scalaire.*

Exercice 1

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\ .\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :



Exercice 2

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal, soient les points A(6 ; 3), B(0 ; 4) et C(-5 ; -2).

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

Exercice 3

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal, soient $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-m+2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4m\\-m\end{pmatrix}$ où m est un nombre réel. Déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

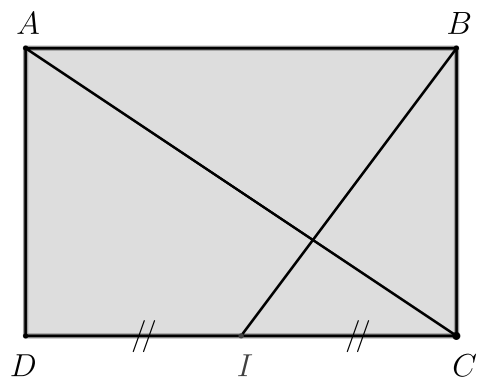
Exercice 4

On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u}.\vec{v} = -6$.
Calculer chacune des expressions suivantes :

1. $(2\vec{u} + 3\vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$;
2. $(\vec{u} - 3\vec{v})^2$.

Exercice 5

Soit a un nombre réel positif. On considère le rectangle ABCD tel que $AB = a$ et AD$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. On note I le milieu de [CD]. Démontrer que les droites (AC) et (BI) sont perpendiculaires.



Géométrie repérée

- *Vecteur normal à une droite. Le vecteur de coordonnées. Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.*
- *Équation de cercle.Équation de cercle.*

Exercice 1

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A(2\ ;\ 3)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. On considère la droite d d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$ et le point $A(-1\ ;\ 2)$.
   (a) Vérifier que le point A n'appartient pas à d.
   (b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite d.

Exercice 2

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre B$(-1\ ;\ 1)$ et de rayon $\sqrt{26}$.
2. Les points A$(4\ ;\ 2)$ et D$(0\ ;\ 2)$ appartiennent-ils à $\mathscr{C}$?
3. Déterminer si l'équation suivante est l'équation d'un cercle :
   (a) $x^2 + y^2 + 2x - 20y + 76 = 0$;
   (b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 10$.

Exercice 3

On considère l'ensemble (D_m) des points $M(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées vérifient :
$(m + 2)x - (m + 1)y - 1 = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que pour toute valeur de m, l'ensemble (D_m) est une droite.
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la droite (D_m) est parallèle aux axes du repère.
3. Tracer (D_0) et (D_1).
4. Montrer que les droites (D_m) passent par un point fixe dont on précisera les coordonnées.

Exercice 4

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la droite (D_λ) d'équation cartésienne : $(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$.
Montrer qu'il existe un point M_0 équidistant de toutes les droites (D_λ).