Préparer sa rentrée en mathématiques expertes

ARITHMÉTIQUE

Exercice 1

1. Donner les critères de divisibilité d'un entier par 2 ; 4 ; 5 ; 7 ; 10 ; 11 et par 25.
   (Faire une recherche pour les critères de divisibilité par 7 et par 11).
2. Est-il vrai que si un entier relatif est divisible par 3 et par 5 alors il est divisible par 15. Pourquoi ?
3. Est-il vrai que si un entier relatif est divisible par 4 et par 6 alors il est divisible par 24. Justifier.

Exercice 2

n désigne un entier naturel tel que $n \geqslant 2$, on pose :

$$A(n) = n^4 - 1.$$

1. Factoriser l'expression $A(n)$.
2. En déduire que les entiers $n-1$, $n+1$ et n^2+1 sont des diviseurs de A.

Exercice 3

1. Démontrer que si a est un entier tel que a^2 est pair alors a est pair. (penser à la contraposée)
2. Démontrer que le produit de deux entiers consécutifs est pair.

Exercice 4

Déterminer, dans chacun des cas suivants, des entiers relatifs n tels que :

1. $n-4$ divise $3n-17$;
2. $2n+1$ divise $9n+17$.

Exercice 5

Effectuer, dans chacun des cas suivants, la division euclidienne de a par b.

1. $a = 224$ et $b = 15$;
2. $a = 1995$ et $b = 24$;
3. $a = 2023$ et $b = 73$.

Exercice 6

1. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
3^n								
Reste de la division euclidienne de 3^n par 5								

2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Exercice 7

1. Décomposer 1 134 et 5 292 en produits de facteurs premiers.
2. Calculer le $PGCD(1\,134\,;\,5\,292)$.
3. Simplifier la fraction $\dfrac{5\,292}{1\,134}$.

Exercice 8

Sophie possède 256 timbres étrangers et 848 timbres français. Elle souhaite les répartir dans des pochettes de même composition. Comment l'aider ?

Exercice 9

Pour tout entier naturel n, on définit la suite (F_n) par : $\boldsymbol{F_n = 2^{2^n} + 1}$.

1. À l'aide d'une calculatrice, déterminer les termes F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5.
   Voici un programme en PYTHON qui calcule le PGCD de deux entiers a et b.

```python
def pgcd(a,b):
    if b==0:
        return abs(a)
    else:
        return pgcd(b,a%b)
```

2. Saisir et exécuter ce programme pour $a = F_5$ et $b = 641$.
   Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 10

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x-5}{3}$ et $\mathscr{D}$ la droite représentative de la fonction f.

1. À l'aide d'une calculatrice, dresser un tableau de valeurs de la fonction f (Choisir : pas$=1$).
2. Citer quatre points de la droite $\mathscr{D}$ dont l'abscisse et l'ordonnée sont des entiers relatifs.

Exercice 11

Pour tout entier naturel n, on note $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ où q est un nombre réel non nul différent de 1.

1. Exprimer S_n en fonction de q et de n. (Utiliser la somme des termes d'une suite géométrique)
   En déduire une factorisation de $q^{n+1} - 1$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $7^{n+1} - 1$ est divisible par 6.

Algèbre et géométrie

Exercice 1

Soit A, B, C et D quatre points de coordonnées $A(-3\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 1)$, $C(4\ ;\ -1)$ et $D(0\ ;\ -2)$.

1. Placer les points A, B , C et D dans un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
2. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
3. Déterminer les coordonnées du centre du parallélogramme ABCD.

Exercice 2

On donne les points $A(4\ ;\ 1)$ et $B(-1\ ;\ 5)$ dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
M est un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ des points $M(x\ ;\ y)$ qui vérifient $AM = BM$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M(x\ ;\ y)$ qui vérifient $AM = 5$.
3. Représenter $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ dans le même repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
4. Donner une relation entre les coordonnées x et y pour que le point $M(x\ ;\ y)$ soit un point de $\mathscr{D}$.
5. Donner une relation entre les coordonnées x et y pour que le point $M(x\ ;\ y)$ soit un point de $\mathscr{C}$.

Exercice 3

A, B et C les point de coordonnées respectives $(3\ ;\ 1)$, $(-2\ ;\ -1)$ et $(2\ ;\ 3)$ dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On désigne par M un point du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$

1. Calcules les normes des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CM}$.
2. Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points M tels que

   a. $AM = BM$, **b.** $CM \leqslant 3$ et **c.** $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$.

3. Soit $\mathscr{D}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$ les ensemble des points M qui vérifient respectivement $AM = BM$, $CM \leqslant 3$ et $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$.
   Représenter dans le plan les ensembles $\mathscr{D}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$.
4. Déterminer une relation que doit vérifier x et y pour que M soit un point
   - de $\mathscr{D}$,
   - de $\mathscr{C}$
   - et de $\mathscr{T}$.

Exercice 4

Résoudre les systèmes :

a. $(S_1)\ :\ \begin{cases} 2x+3y &= 5 \\ 3x+y &= 3 \end{cases}$; **b.** $(S_2)\ :\ \begin{cases} 2x-y &= 3 \\ -4x+2y &= -6 \end{cases}$; **c.** $(S_3)\ :\ \begin{cases} -x+2y &= 3 \\ 2x-4y &= 4 \end{cases}$.

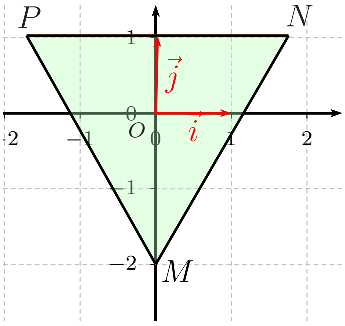
Exercice 5

Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

1. Vérifier que 2 est une solution de l'équation (E) : $f(x) = 0$.
2. En déduire toutes les solutions de l'équation (E) et une factorisation de $f(x)$.

Exercice 6

M$(0\ ;\ -2)$, N$(\sqrt{3}\ ;\ 1)$ et P$(-\sqrt{3}\ ;\ 1)$ sont les points représentés dans le repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



1. Démontrer que les points M, N, P appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
2. Démontrer que le triangle MNP est équilatéral.
3. Soit Q le milieu du segment [ON]. Déterminer les coordonnées du point L tel que le quadrilatère MOQL soit un parallélogramme.

Exercice 7

On donne les points A, B et D de coordonnées respectives $(-2\ ;\ 2)$, $(2\ ;\ 4)$ et $(6\ ;\ 3)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. **a.** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{AB}$.
   b. Démontrer que les droites (OD) et (AB) sont parallèles.
2. M est un point du plan de coordonnées $(x\ ;\ y)$ avec $(x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ 0)$.
   a. Démontrer que les droites (OM) et (AB) sont parallèles si, et seulement si, $2y - x = 0$.
   b. Démontrer que les droites (OM) et (AB) sont perpendiculaires si, et seulement si, $2x + y = 0$.

Exercice 8

On considère les points A et B de coordonnées respectives $(1\ ;\ \sqrt{3})$ et $(-\sqrt{3}\ ;\ 1)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. **a.** Placer les points A et B.
   b. Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.
2. K est le milieu du segment [AB]
   a. Placer le point K
   b. Calculer les coordonnées du point K.
3. On note C le point du plan de coordonnées $(1 - \sqrt{3}\ ;\ 1 + \sqrt{3})$.
   a. Montrer que K est le milieu du segment [OC].
   b. Placer le point C et démontrer que le quadrilatère OACB est un carré.