<u>Pour réussir en mathématiques complémentaires en terminale – CORRECTION</u>

<u>Exercice 1 :</u>

a) Δ = 100 > 0 – Les solutions sont $x_1=-\frac{2}{3}$ et $x_2=1$

b) Δ = 36 > 0 – Les solutions sont $x_1=2$ et $x_2=8$

c) Δ = 81 > 0 – Les solutions sont $x_1=0$ et $x_2=9$

d) Δ = - 8 – Il n'y a pas de solutions réelles à cette équations

<u>Exercice 2 :</u>

a) P(1) = $1^3 + 1^2 - 2 = 0$, donc 1 est racine.

b) $(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$

Par identification, on a donc *a* = 1, *c* = 2 et comme *b* - *a*=1, on a donc *b* = 2.

c) P(*x*) = 0 est équivalent à $(x-1)(x^2+2x+2)=0$ qui est une équation « produit nul ».

Le discriminant de polynôme de degré 2 est négatif (Δ = - 4) , la seule solution est donc *x* = 1.

<u>Exercice 3 :</u>

1) Ensemble de dérivabilité : $\mathbb{R}$

$f'(x)=-15x^4+4x^3+10x$

2) Ensemble de dérivabilité : $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x)=-\frac{3}{x^2}$

3) Ensemble de dérivabilité : $]0;+\infty[$

$f'(x)=\frac{6}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{\sqrt{x}}$

4) Ensemble de dérivabilité : $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x)=10(3x-\frac{1}{x^2})$

5) Attention ! Utilisation de la formule de la dérivée d'un produit de deux fonctions.

Ensemble de dérivabilité : $\mathbb{R}$

$f'(x)=2(3x^2+7)+(2x-5)\times 6x=18x^2-30x+14$

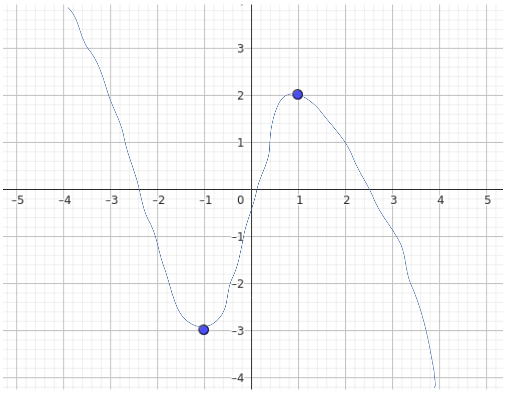
6) Attention ! Utilisation de la formule de la dérivée d'un quotient de deux fonctions.

Ensemble de dérivabilité : $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2(5x^2+7)-(2x+5)\times 10x}{(5x^2+7)^2}=\frac{-10x^2-50x+4}{(5x^2+7)^2}$$

<u>Exercice 4 :</u>

QUESTION 1 :



QUESTION 2 :

x	-5		-3		-1		2		3
Signe de *f'(x)*		+	0	-	0	+	0	-	

QUESTION 3 : 1)d) - 2)b) - 3)c) – 4)a)

Exercice 5 :

1) Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 vaut 0.
2) Le nombre dérivé en – 1 vaut 2.
3) $f'(2) = -0,5$

Exercice 6 :

$f(3)=7\times 3^2+3=66$
$f'(x)=14x$ donc $f'(3)=42$
L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 3 est donc :
$y=f'(3)(x-3)+f(3)$ ce qui donne $y=42x-60$

Exercice 7 :

1) $f(-1)=72\times(-1)^2-4\times(-1)+2=8$
$f'(x)=4x-4$ donc $f'(-1)=-8$
L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse -1 est donc :
$y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$ ce qui donne $y=-8x$.

2) $f(x)-(-8x)=2x^2+4x+2$
Étudions le signe de cette quantité (cf. méthode présentée dans le document)
$\Delta = 0$. La solution est $x_0=-1$
Le signe de cette quantité est donc toujours le signe de *a*. Ici *a* = 2, donc pour tout réel *x*,
$f(x)-(-8x)\geq 0$ ce qui signifie que la tangente T_{-1} est toujours en-dessous de la courbe représentative de *f*.

3) Regardons pour quelles valeurs de *x*, $f'(x)=0$. On a donc $4x-4=0$ soit *x*= 1.
Seule la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 8 :

A= e^1 B= e^{-x^3-4} C= e^{14x-16}

Exercice 9 :

1) $6x=3$; $x=0,5$

$x+4=1-3x$; $4x=-3$; $x=-\frac{3}{4}$

$x+4=0$; $x=-4$

$x=-x$; $x=0$

2) → Pour tout réel *x*, $e^{4x-7}>0$, donc $x-1=0$. L'unique solution est donc *x* = 1.
→ $xe^{2x}-2e^{2x}=0$ est équivalent à $e^{2x}(x-2)=0$. Pour tout réel *x*, $e^{2x}>0$, donc $x-2=0$.
L'unique solution est donc *x* = 2.

Exercice 10 :

$e^{-3x+2}-1\geq 0$
$e^{-3x+2}\geq 1$
$e^{-3x+2}\geq e^0$
$-3x+2\geq 0$
$-3x\geq -2$
$x\leq -\frac{2}{3}$
S=$]-\infty;-\frac{2}{3}]$

$e^{x^2-3}<e^{-2x}$
$x^2-3<-2x$
$x^2-2x-3<0$
$\Delta = 16 > 0$. Les solutions sont $x_1=3$ et $x_2=1$
Comme *a* = 1>0, la parabole est tournée vers le haut et c'est entre les racines que le poynôme est négatif.
S=$]-3;1]$

Exercice 11 :

1) Pour tout réel *x*, $e^{2x+1}>0$, donc le signe de *f* dépend du signe de $5x-7$.

x	$-\infty$ $\quad\frac{7}{5}\quad$ $+\infty$
Signe de *f(x)*	- 0 +

2) Pour tout réel *x*, $e^{6x+4}>0$ et $(x-3)^2\geq0$ donc *g*(*x*) > 0 pour $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

3) Pour tout réel *x*, $2e^{4x^2-1}>0$, donc le signe de *h* dépend du signe de x .

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
Signe de *h(x)*	- 0 +

Exercice 12 :

$l'(x)=-e^{-x}$ $\qquad$ $k'(x)=-3e^{-3x+1}$ $\qquad$ $f'(x)=e^{x+1}+xe^{x+1}=e^{x+1}(1+x)$

$g'(x)=\frac{e^x\times x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ pour tout réel x non nul

$h'(x)=-2e^{-2x+5}-3e^x-6$

Exercice 13 :

Etude des variations de *k*

$k'(x)=3e^x-3=3(e^x-1)$

$e^x-1>0$

$e^x>1$

$e^x>e^0$

$x>0$

x	$-\infty$ $+\infty$ 0
k'(*x*)	- 0 +
Variations de *k*	$\searrow$ *k*(0) = 3 $\nearrow$

Etude des variations de *l*

$l'(x)=-12e^{-3x+2}$

Pour tout réel *x*, *l*'(*x*) < 0

x	$-\infty$ $+\infty$
l'(*x*)	-
Variations de *l*	$\searrow$

Exercice 14 :

1) $R(7)=(5\times7-30)e^{-0,25\times7}=5e^{-1,75}\approx0,8789$ soit un résultat de 8789€.

2) $x = 4$. $R(4)=(5\times4-30)e^{-0,25\times4}\approx-3,6788<0$. On a bin un déficit.
3) $R(x)\geq0$
$(5x-30)e^{-0,25x}\geq0$
$5x-30\geq0$ car $e^{-0,25x}>0$ pour tout réel x.
$5x\geq30$
$x\geq6$
Le résultat est positif à partir de 600 litres produits.
4) $R'(x)=5e^{-0,25x}+(5x-30)\times(-0,25)e^{-0,25x}=e^{-0,25x}(5-1,25x+7,5)=e^{-0,25x}(-1,25x+12,5)$
On étudie donc le signe de R'.
Pour tout réel x, $e^{-0,25x}>0$
$-1,25x+12,5>0$
$-1,25x>-12,5$
$x<10$
$R(10)\approx1,6417$

x	2		10		20
$R'(x)$		+	0	-	
Variations de R	$R(2)$	$\nearrow$	$R(10)$	$\searrow$	$R(20)$

Pour 1000L, on obtient donc un résultat maximal d'environ 16417€.

Exercice 15 :
1) Augmenter de 24% revient à multiplier par 1,24. (u_n) est donc géométrique de raison 1,24.
2) $u_n = u_0 \times q^n = 1095 \times 1,24^n$
3) $u_{20} = 80881$ soit 80881 téléchargements lors de la 20ème minute.

Exercice 16 :
1) $u_0 = 7$, $u_1 = 4$ et $u_2 = 1$.
2) La suite est arithmétique de 1er terme 7 et de raison -3.
3) $u_{50} = 7 - 3 \times 50 = -143$

Exercice 17 :
1) $u_0 = 1500$
2) Augmenter de 3% revient à multiplier par 1,03 auquel il faut ajouter la part fixe de 50€ (+50). Cela nous donne l'expression attendue.
3) 2021 correspond à u_3. On obtient après calculs des termes précédents, $u_3 = 1793,64$.
4) $u_4 = 2004,37$
$u_5 = 2004,37$ soit un salaire de 2004,37€ pour 2023.

Exercice 18 :
1) $S=10\times\frac{u_0+u_9}{2}=10\times\frac{6+(-21)}{2}=-75$ car $u_0=6$ et $u_9=6-3\times9=-21$
2) $S=u_0\times\frac{1-2^8}{1-2}=3\times\frac{-255}{-1}=765$
3) $S_1=3+5+7+....+21 \rightarrow$ somme des 10 premiers termes d'une suite arithmétique de 1er terme 3 et de raison 2.
Donc $S_1=10\times\frac{3+21}{2}=120$.

$S_2=2+4+8+16+...+512 \rightarrow$ somme des 9 premiers termes d'une suite géométrique de 1er terme 2 et de raison 2.

Donc $S_2=2\times\frac{1-2^9}{1-2}=2\times\frac{-511}{-1}=1022$.

Exercice 19 :

1) $u_1=300\times1{,}05+15=330$ et $u_2=361{,}5$

2) $u_1-u_0=30$ et $u_2-u_1=31{,}5$, la suite n'est donc pas arithmétique.

$\frac{u_0}{u_1}=0{,}909$ et $\frac{u_1}{u_2}=0{,}913$, la suite n'est pas géométrique.

3)a) $v_0=u_0+300=600$

$v_{n+1}=u_{n+1}+300=1{,}05\,u_n+15+300=1{,}05\,u_n+315=1{,}05\left(u_n+\frac{315}{1{,}05}\right)=1{,}05(u_n+300)=1{,}05\,v_n$

(v_n) est donc géométrique de 1er terme v_0 = 600 et de raison q = 1,05.

b) $v_n=v_0\times q^n=600\times1{,}05^n$ donc $u_n=v_n-300=600\times1{,}05^n-300$.

3) $u_8=600\times1{,}05^8-300\approx586$. La surface n'a donc pas doublée en 8 semaines.

Exercice 20 :

1) Il y a 32 élèves. Il s'agit de l'effectif total.

2) Etendue = valeur max – valeur min = 18 – 2 = 16.

3) moyenne$=\frac{2\times2+3\times2+...+18\times2}{32}=\frac{291}{32}\approx9{,}09$

4) Il y a 32 valeurs. La médiane serait donc la moyenne des 16ème et 17ème valeurs de la série. Ce sont toutes les deux des 10. Donc médiane = 10.

5) $32\times0{,}75=24$. Q_3 est donc la 24ème valeur. Q_3 = 12.

Exercice 21 :

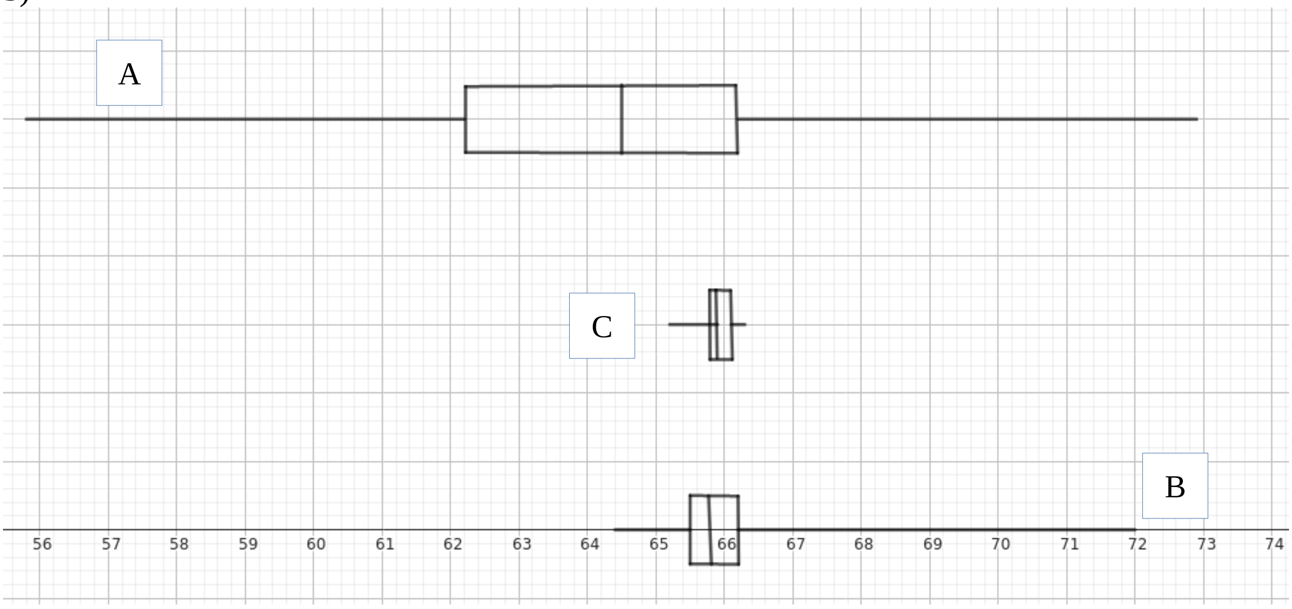
1) Min = 55,8 – Max = 72,9 – Mediane = 64,5 – Q_1 = 62,2 – Q_3 = 66,2.

L'écart inter-quartile est de : I = Q_3 – Q_1 = 4.

2) L'intervalle est donc le suivant : [Q_1 – 1,5 I ; Q_3 +1,5 I] = [56,2 ; 72,2].

Il y a deux valeurs en dehors de cet intervalle (55,8 et 72,9) sur 40 ce qui représente 5%.

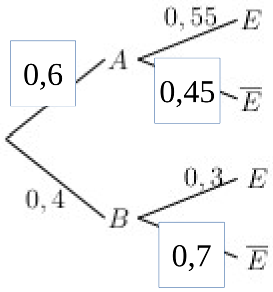
3)



Le diagramme en boite associé au robot A est beaucoup plus étendu que les deux autres.
Cela veint du fait que le contrôle du robot A n'a été fait que sur 60 pièces contre 1200 pièces pour les autres. Il n'est donc pertinent que de comparer les robots B et C. Le diagramme en boite associé au robot C est plus compact. Cela indique donc que le robot C est plus régulier que le B.

Exercice 22 :

1)



p(A ∩ E) = $0,6\times0,55=0,33$

p(A ∩ $\overline{E}$) = $0,4\times0,3=0,12$

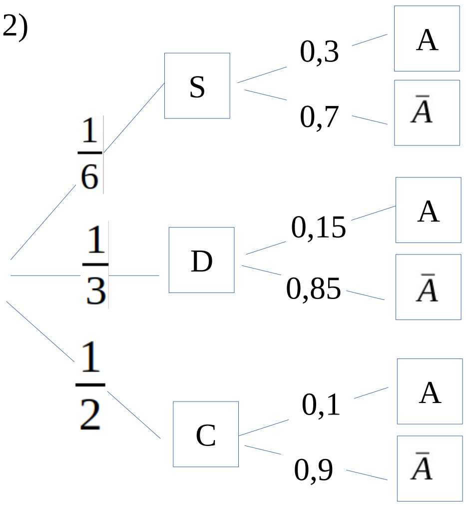
p(E) = p(A ∩ E) + p(A ∩ $\overline{E}$) = 0,55

Exercice 23 :

1) a) $p(S)=\frac{50}{300}=\frac{1}{6}$, $p(D)=\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$ et $p(C)=\frac{150}{300}=\frac{1}{2}$.

b) $p_S(A)=0,3$, $p_D(A)=0,15$ et $p_C(\bar{A})=0,9$

2)



3) p (S ∩ A) $=\frac{1}{6}\times0,3=0,05$

4) p(A) = p (S ∩ A) + p (D ∩ A) + p (C ∩ A)

= 0,05 + $\frac{1}{3}\times0,15+\frac{1}{2}\times0,1=0,15$

5) $p_A(S)=\frac{p(S\cap A)}{p(A)}=\frac{0,05}{0,15}=\frac{1}{3}$

Exercice 24 :

1) X peut prendre les valeurs +5, +1 et -1.

2)

k	+5	+1	-1
p(X=*k*)	$\frac{4}{52}$	$\frac{12}{52}$	$\frac{36}{52}$

Exercice 25 :

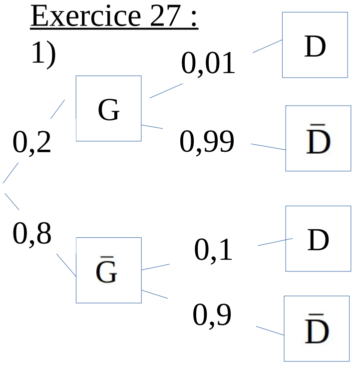
1) *a* =0,1

2) p(X>1) = p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) = 0,1 + 0,32 + 0,18 = 0,6

3) E(X) = $-2\times0,2+0,5\times0,15+...+5\times0,18=2,205$ et on a $\sigma(X)=2,558413$

Exercice 27 :

1)



2) $p(D)=p(G\cap D)+p(\bar{G}\cap D)=0,2\times0,01+0,8\times0,1=0,082$

3) $p_D(G)=\frac{p(G\cap D)}{p(D)}=\frac{0,2\times0,01}{0,082}\approx0,024$

4) a)

k	0	80	280
p(X=*k*)	0,2	0,72	0,08

b) E(X) = 80. L'entretien d'une chaudière coûte en moyenne 80€