<u>Pour réussir en mathématiques complémentaires en terminale</u>

Ce document contient des éléments de cours « nouveau » (en encadré), des exercices et en bleu je donne des informations de contenus à revoir que nous avons traitées cette année ou des indications importantes.

1) Second degré

Pour traiter cette partie, il conviendra d'être à l'aise avec le fait de développer, factoriser et manipuler des expressions algébriques. Il est aussi important de maîtriser la résolution des équations de degré 1 (ex : $3x + 10 = 7 - 4x$) et des équations « cas particulier » de degré 2 (ex : $(x-1)(5x + 10)= 0$ dite « équation produit nul » ou encore $x^2 = 36$).

a) Résolution des équations

COURS

<u>Définition :</u> Une équation de degré 2 ou du second degré est une équation qui peut se ramener à une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels.

La méthode consiste d'abord à **identifier correctement les réels *a, b* et *c***.

<u>Remarque :</u> Quand il n'y a « rien » devant un terme en x ou x^2 c'est que le coefficient vaut 1 !

En effet : $x=1\times x$ et $x^2=1\times x^2$

Faites également attention à bien prendre le signe du coefficient !

Exemple : Dans l'équation $2x^2 - x + 7 = 0$, on a $a = 2$, $b = -1$ et $c = 7$.

Il convient par la suite de calculer le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé **discriminant** associé à l'équation.

Δ se lit « delta ».

C'est le signe de ce réel qui indique le nombre de solutions et qui permet d'en calculer la valeur.

* Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solutions réelles à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

* Si $\Delta = 0$, il a une seule solution à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ qui est $x_0=\frac{-b}{2a}$.

* Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ qui sont $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

<u>Remarque :</u> Pour désigner les solutions, on peut aussi parler des **racines** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

<u>Exercice 1 :</u> Résoudre les équations suivantes (penser à toujours vous ramener à une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ et au besoin développer en amont)

a) $-6x^2+2x+4=0$

b) $x^2-10x+16=0$

c) $x^2-2x+5=(x-5)(2x-1)$

d) $-x^2+2x=3$

b) Résolution des inéquations

COURS

Il faut d'abord résoudre l'équation de degré 2 avec la méthode vue précédemment.

C'est ensuite le signe de Δ qui donne la forme du tableau de signe :

* Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solutions réelles à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et le tableau de signe est de la forme :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$	Signe de a

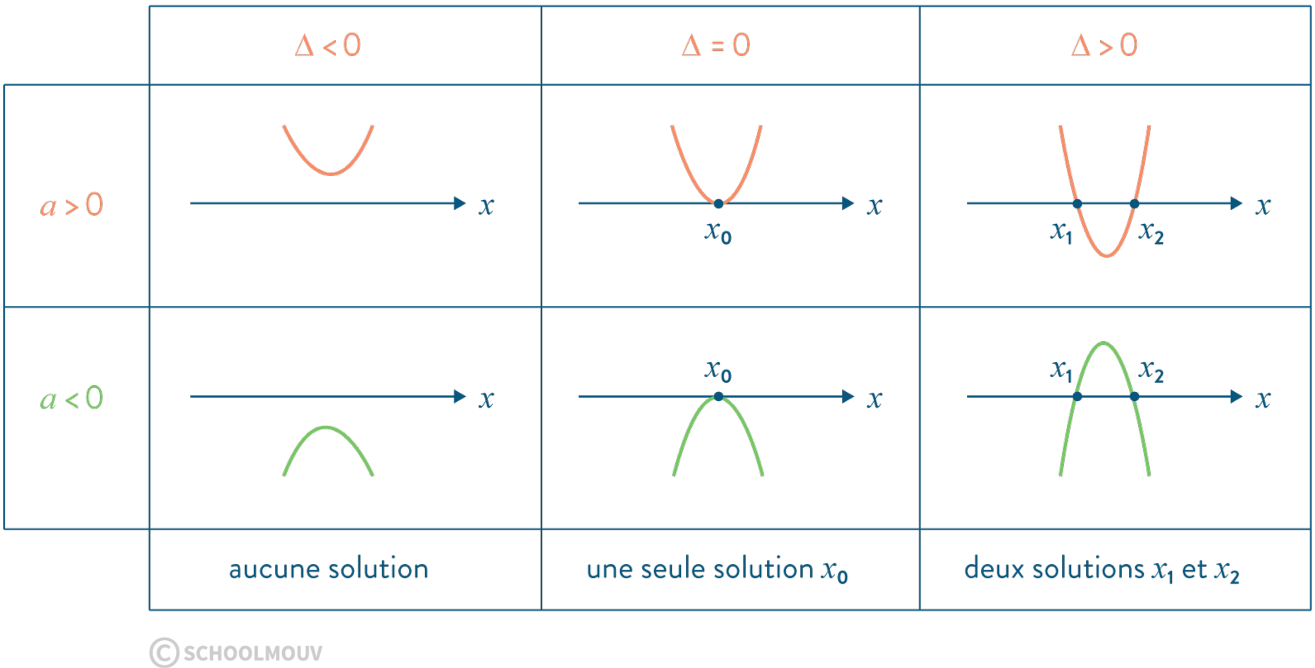
* Si Δ = 0, il a une seule solution à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ qui est $x_0 = \frac{-b}{2a}$ et le tableau de signes est de la forme :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Signe de a	

* Si Δ > 0, il y a deux solutions à l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ qui sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et le tableau de signes est de la forme :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $ax^2 + bx + c$		Signe de a	0	Opposé du signe de a	0	Signe de a	

<u>Remarque :</u> Penser à faire la parallèle avec la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 (c'est à dire de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$) qui est une parabole dont l'orientation dépend du signe du coefficient a.



c) « Problème »

<u>Exercice 2 :</u>
On considère la fonction P définie sur R par $P(x) = x^3 + x^2 - 2$.
a) Montrer que 1 est racine de P.
b) Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout nombre réel x, $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
c) Résoudre $P(x) = 0$

2) Fonctions (généralités)

Pour traiter cette partie, il faut revoir :

- Le calcul de la fonction dérivée des fonctions polynômes de degré 2
- La définition du nombre dérivé en *a* comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse *a*
- Lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et signe de sa fonction dérivée

a) Dérivation (TRÈS IMPORTANT)

COURS :

	Fonction *f*	**Fonction dérivée *f'***	**Intervalle de dérivabilité**
Fonction puissance	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
Fonction inverse	$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
Fonction racine carrée	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Cadre : *u* et *v* sont des fonctions dérivables sur un intervalle I et *k* est un réel fixé.

	Fonction *f*	**Fonction dérivée *f'***	**Intervalle de dérivabilité**
Somme	$f(x)=u(x)+v(x)$	$f'(x)=u'(x)+v'(x)$	*I*
Produit	$f(x)=k\times u(x)$	$f'(x)=k\times u'(x)$	*I*
	$f(x)=u(x)\times v(x)$	$f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$	
Quotient	$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$	*I* où *v(x)* est non nul

Théorème : Soit une fonction *f* définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x)\leq 0$, alors *f* est **décroissante** sur I.
- Si $f'(x)\geq 0$, alors *f* est **croissante** sur I.

Exercices 3 :

Préciser sur quels intervalles les fonctions ci-dessous sont dérivables, puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x)=-3x^5+x^4-2+5x^2+10$ 2) $f(x)=\frac{3}{x}$ 3) $f(x)=6\sqrt{x}$

4) $f(x)=10\left(x^3+\frac{1}{x}\right)$ 5) $f(x)=(2x-5)(3x^2+7)$ 6) $f(x)=\frac{2x+5}{5x^2+7}$

Exercice 4 : Les questions suivantes sont indépendantes

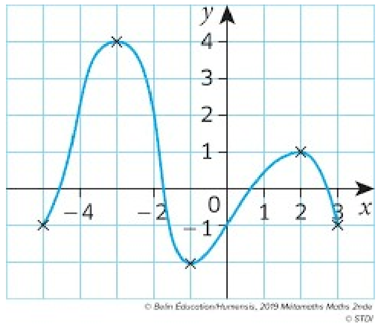
QUESTION 1 : On donne le tableau de signe suivant.

Il correspond à la fonction dérivée d'une fonction *f*. On sait de plus que *f*(-1) = - 3 et *f*(1) = 2.

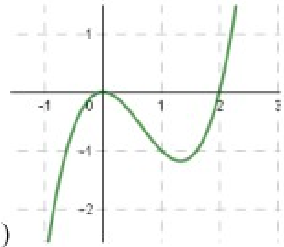
Proposer une représentation graphique pour *f*.

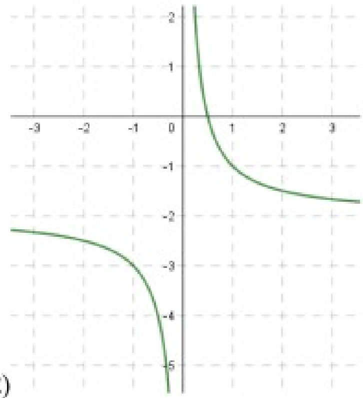
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

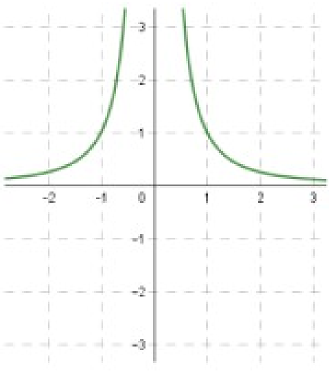
QUESTION 2 : On donne la représentation graphique suivante d'une fonction f .
Établir le tableau de signe de la dérivée f' de cette fonction.

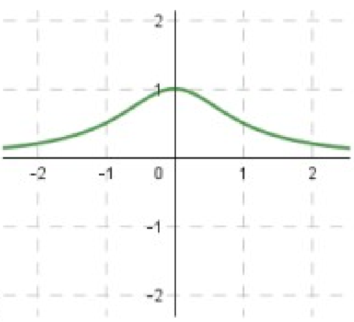


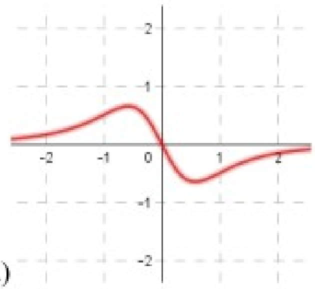
QUESTION 3 : On donne les courbes de quatre fonctions à gauche et celles de leurs dérivées à droite.
Associer chaque fonction à sa dérivée. Justifier.

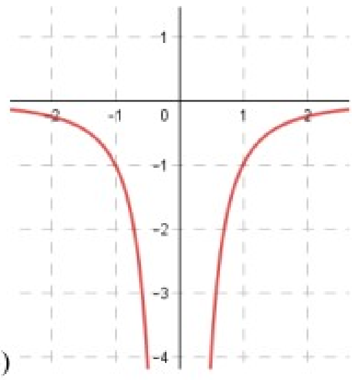

1)

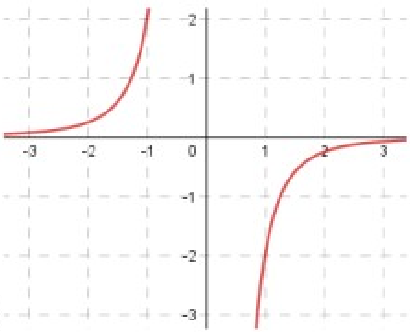

2)

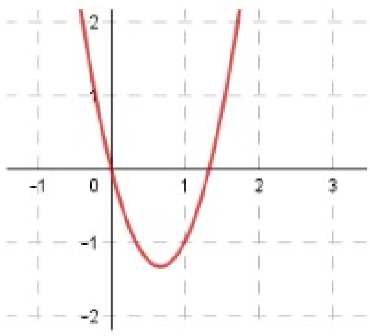

3)


4)


a)


b)


c)


d)

b) Équation de la tangente à la courbe

COURS :
Définition : La **tangente** à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse *a* est la droite passant par A et dont le coefficient directeur est $f\,'(a)$.

Propriété : Soit *f* une fonction dérivable en *a* et *Cf* sa courbe représentative.
Soit A (a ; $f(a)$). **La tangente en A à *Cf* a pour équation : $y = f\,'(a)(x - a) + f(a)$**

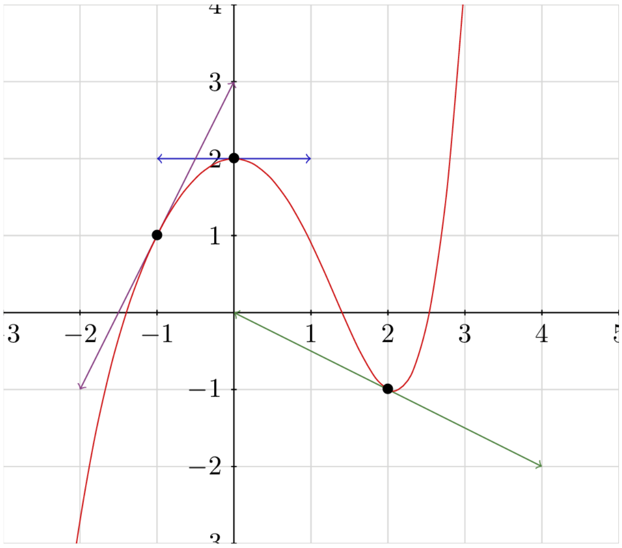
Exercice 5 :
On a tracé ci-dessous trois tangentes à la courbe représentative d'une fonction *f*.
Déterminer graphiquement :

1) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

2) Le nombre dérivé en -1.

3) $f'(2)$.

Vous remarquerez que dans cette exercice il s'agit de la même question posée de trois façon différentes.



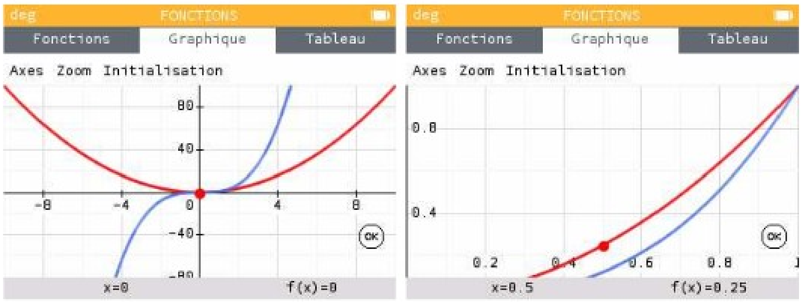
Exercice 6 : On considère la fonction $f(x)=7x^2+3$
Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 3.

c) « Problème »

MÉTHODE
Supposons que nous ayons à disposition deux fonctions *g* et *f* de courbes associées *Cf* et *Cg* .
Nous souhaiterions savoir à quel moment la courbe *Cf* se trouve au dessus de la courbe *Cg* (et vice versa).
On pourrait résoudre ce type de problème graphiquement (en utilisant la calculatrice) mais il y a toujours une imprécision liée à la lecture graphique. Il faut donc apprendre à résoudre ce problème « par le calcul » (c'est à dire algébriquement).
Propriété :
La position relative entre deux courbes *Cf* et *Cg* est donnée par le signe de la différence $f(x) - g(x)$:
1. Si $f(x) - g(x) > 0$ sur un ensemble I, *Cf* est au dessus (strictement) de *Cg* sur cet ensemble de points.
2. Si $f(x) - g(x) = 0$ sur un ensemble I, *Cf* coupe *Cg* sur cet ensemble de points.
3. Si $f(x) - g(x) < 0$ sur un ensemble I, *Cf* est au dessous (strictement) de *Cg* sur cet ensemble de points.
Exemple :
Comparons la position relative de $f(x)=x^2$ et $g(x)=x^3$.
Pour cela, nous étudions le signe de $h(x)=f(x)-g(x)=x^2-x^3=x^2(1-x)$ après factorisation.
Nous obtenons alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

En résumé, C_f est au dessous de C_g lorsque $x \in]1;+\infty[$, C_f coupe C_g aux points $x = 1$ et $x = 0$, sinon C_f est au dessus de C_g.



Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-4x+2$.

1) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 à la courbe C_f.

2) Étudier la position relative de T_{-1} et de C_f courbe représentative de la fonction f.

3) La courbe C_f admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?

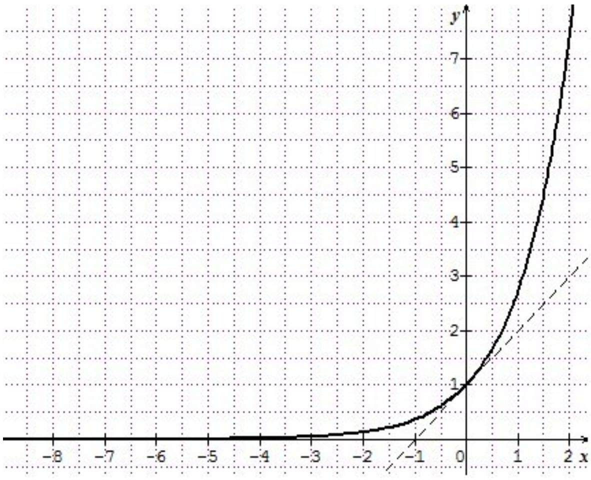
3) Fonction exponentielle (TRÈS IMPORTANT)

a) Premières propriétés

COURS

Définition : La fonction exponentielle est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

Sa courbe représentative est :



Propriétés :

→ c'est une f**onction strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

→ c'est une **fonction strictement positive sur** $\mathbb{R}$ (elle ne s'annule donc jamais !), $e^x>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

→ $e^0=1$

→ Pour tout $a, b \in \mathbb{R}, e^{a+b}=e^a \times e^b$

→ Pour tout $a \in \mathbb{R}, e^{-a}=\frac{1}{e^a}$

→ Pour tout $a, b \in \mathbb{R}, e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$

→ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{Z}, e^{nx}=(e^x)^n$

Exercice 8 :

Simplifier A= $e^{(x^2-6)}\times e^{(7-x^2)}$, B= $\dfrac{e^{x^3-7}}{e^{2x^3-3}}$ et C= $\left(e^{(3x-4)}\right)^4$.

b) Résolution des équations et des inéquations

MÉTHODE : Résoudre des équations et des inéquations avec la fonction exponentielle

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a, pour tous réels *a* et *b* :

- $a<b \Leftrightarrow e^a<e^b$
- $a=b \Leftrightarrow e^a=e^b$

Exemples :

- $e^{3x+1}=e^4 \Leftrightarrow 3x+1=4 \Leftrightarrow 3x=-3 \Leftrightarrow x=-1$
- $e^{3x+1}<1 \Leftrightarrow e^{3x+1}<e^0 \Leftrightarrow 3x+1<0 \Leftrightarrow 3x<-1 \Leftrightarrow x<\dfrac{-1}{3}$

Exercice 9 :

1) Résoudre : $e^{6x}=e^3$, $e^{x+4}=e^{1-3x}$, $e^{x+4}=1$ et $e^x-e^{-x}=0$

2) Résoudre : $(x-1)\times e^{(4x-7)}=0$ et $x e^{2x}-2e^{2x}=0$ (penser à factoriser)

Exercice 10 : Résoudre les inéquations suivantes : $e^{-3x+2}-1\geq 0$ et $e^{x^2-3}-e^{-2x}<0$

Exercice 11 : Déterminer le signe des fonctions suivantes :

1) $f(x)=e^{2x+1}(5x-7)$

2) $g(x)=\dfrac{e^{-6x+4}}{(x-3)^2}$

3) $h(x)=2xe^{4x^2-1}$

c) Dérivation

COURS :

Propriété : La fonction exponentielle $f(x)=e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x)=e^x$.

En composant la fonction exponentielle avec une fonction affine :

Soient *a* et *b* deux réels.

La fonction *f* définie par pour tout $x\in\mathbb{R}, f(x)=e^{ax+b}$ est dérivable sur *I* et $f'(x)=a\times e^{ax+b}$

Exemple :

Soit *f* définie par $f(x)=e^{-7x+4}$. *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f(x)=-7e^{-7x+4}$.

Exercice 12 : Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$l(x)=e^{-x}$ $\quad k(x)=e^{-3x+1}$ $\quad f(x)=xe^{x+1}$ $\quad g(x)=\dfrac{e^x}{x}$ $\quad h(x)=e^{-2x+5}-3e^x-6x$

Exercice 13 : Étudier les variations des fonctions k et l définies sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=3e^x-3x$ et $l(x)=4e^{-3x+2}$.

d) « Problème »

Exercice 14 :

Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2 000 litres de produit par semaine. Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par :

$$R(x)=(5x-30)e^{-0{,}25x}, \text{ pour tout réel } x\in[2;20]$$

1) Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.
2) Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).
3) Résoudre l'inéquation $R(x) \geq 0$, d'inconnue x. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
4) On note R' la dérivée de la fonction R .
Déterminer la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

4) Suites (TRÈS IMPORTANT)

Les notions suivantes sont à réviser :

- Modes de génération d'une suite : explicite $u_n = f(n)$ ou relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$
- Suites arithmétiques : exemples, définition, calcul du terme général.
- Suites géométriques : exemples, définition, calcul du terme général.
- Sens de variation d'une suite.
- Sur des exemples, introduction intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite.
- Les algorithmes de seuil

Exercice 15 :

On s'intéresse au nombre de téléchargements effectués sur un site de vidéos à la demande durant les premières minutes après sa sortie du premier épisode de la dernière saison de la série « Game of Thrones ».
On fait l'hypothèse qu'à partir de la première minute, le nombre de téléchargements augmente de 24 % à chaque minute qui s'écoule.
Le nombre de téléchargements, que l'on notera u_n, durant la minute n est alors modélisé par une suite de premier terme $u_0 = 1095$.
1. Justifier que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.
2. Exprimer u_n en fonction de l'entier naturel n.
3. Selon ce modèle, combien de téléchargements seront effectués lors de 20ème minute ?

Exercice 16 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 7 - 3n$
1) Calculer u_0, u_1 et u_2
2) Quelle est la nature de la suite (u_n) et donner la raison et le premier terme.
3) Quelle est la valeur du 51ème terme ?

Exercice 17 :

Le salaire mensuel d'un employé en janvier 2018 est de 1500€.
Le 1er janvier de chaque année, son patron s'est engagé à le lui augmenté d'une part fixe de 50€ ainsi que d'une part modulable de 3 % calculée sur la base du salaire du mois de décembre qui vient de s'écouler.
Le salaire reste ensuite identique tout le reste de l'année.
On note u_n le salaire mensuel de l'employé en 2018+n.

1) Donner la valeur de u_0.
2) Justifier que pour tout entier naturel que $u_{n+1} = 1,03u_n + 50$.
3) Déterminer le salaire de l'employer en 2021.
4) Calculer u_5 et expliquer ce que cela représente.

a) Somme des termes d'une suite géométrique/arithmétique

COURS :
On veut faire la somme des termes dans le cas des deux modèles de suites « au programme ».
Il y a une formule à retenir pour chacune d'entre-elles :
→ Pour une suite arithmétique : S = $\text{nombre de termes} \times \dfrac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$

Exemple : S = 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 21 = $10\times\frac{3+21}{2}=120$

On reconnaît ici la somme des 10 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 3.

→ Pour une suite géométrique : S = $1\text{er terme}\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

Exemple : S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^8 = $1\times\frac{1-2^9}{1-2}=\frac{1-512}{-1}=511$

On reconnaît ici la somme des 9 premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.

Exercice 18 :

1) Calculer la somme des 10 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 6 et de raison -3.
2) Calculer la somme des 8 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 3 et de raison 2.
3) Après avoir identifié les suites correspondantes, calculer les sommes suivantes : $S_1=3+5+7+....+21$ et $S_2=2+4+8+16+...+512$

b) Le cas classique d'une suite arithmético-géométrique

MÉTHODE : Montrer qu'une suite est géométrique

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 12$ et définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 3u_n - 4$. Par ailleurs, on considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa raison ainsi que son premier terme.

Voir la solution

Soit n un entier naturel.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2$ d'après l'énoncé.
$= (3u_n - 4) - 2$ d'après l'énoncé.
$= 3u_n - 6$
$= 3(u_n - 2)$ en factorisant (on peut aussi remplacer u_n par $v_n + 2$)
$= 3v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
De plus, le premier terme de cette suite est $v_0 = u_0 - 2 = 10$.

Exercice 19 :

Aujourd'hui les chardons (une plante vivace) ont envahi 300m² des champs d'une région. Chaque semaine, la surface envahie augmente de 5 % par le développement des racines, auquel s'ajoutent 15 m² suite à la dissémination des graines.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la surface envahie par les chardons, en m², après n semaines ; on a donc $u_0=300$ m².

1) a. Calculer u_1 et u_2.
   b. Montrer que la suite (u_n) ainsi définie, n'est ni arithmétique ni géométrique.

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}05\,u_n+15$.

2) On considère la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n, par : $v_n=u_n+300$.

a. Calculer v_0 , puis montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme de cette suite.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n, puis u_n.

3) Est-il correct d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé au bout de 8 semaines ? Justifier la réponse.

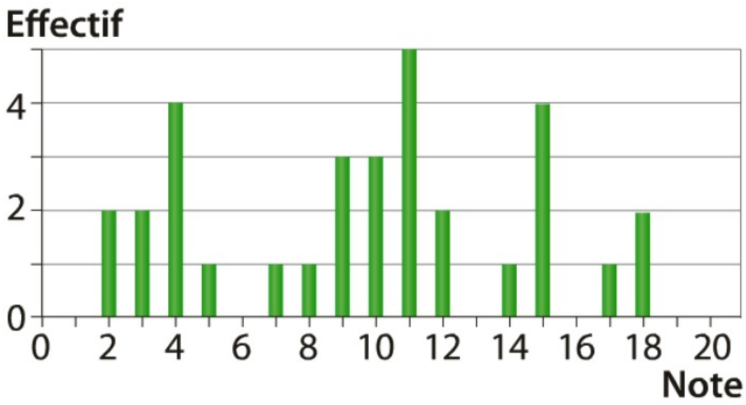
5) Statistiques

Les notions suivantes sont à réviser :

- Différentes représentation d'une série statistique (diagramme circulaire, diagramme en bâton, histogramme, tableau,...)
- Moyenne et écart-type (à déterminer à la calculatrice)
- Médiane et quartile – écart interquartile
- Interprétation de tous ces indicateurs
- Diagramme en boite

Exercice 20 :

Le diagramme en bâton ci-contre illustre les notes des élèves d'une classe à un DS.



1- Combien y-a-t-il d'élèves au total dans cette classe ? En terme statistique, que venez-vous de calculer ?

2- Calculer l'étendue de la série des notes.

3- Calculer la moyenne des notes de la classe à ce devoir.

4- Déterminer la médiane.

5- Déterminer le troisième quartile.

Exercice 21 :

Un robot industriel (robot A) est utilisé pour faire des pièces en caoutchouc.
Pour contrôler la régularité de la machine, on a pesé 40 pièces en sortie de chaîne.

69,7	63,6	64,4	62,4	63,4	59,7	60,7	65	67	65,6
68,8	60,3	63,4	67,6	64,1	72,9	64,5	66,2	65,3	66,4
65,9	55,8	67,1	65,5	64,5	62,2	71	64,4	69,8	66,1
68,7	61,2	63,1	64,6	58,7	62,3	61,2	62,1	61,4	64,8

1) Déterminer le minimum, le maximum, la médiane et les premier et troisième quartile de cette série à la calculatrice.
2) On considère comme anormal les mesures qui n'appartiennent pas à l'intervalle $[Q_1 - 1{,}5\ I\ ;\ Q_3 + 1{,}5\ I]$ où I désigne l'écart inter-quartile. Quel est le pourcentage de ces valeurs anormales ?

Deux autres robots B et C ont aussi subi un contrôle. Cette fois-ci, 1200 pièces ont été pesées.
On a obtenu les résultats suivant :

	Min	Q_1	Med	Q_3	Max
B	64,4	65,4	65,8	66,2	72
C	65,2	65,8	65,9	66,1	66,3

3) Construire les diagrammes en boite associés aux séries des robots A, B et C.
4) En quoi le diagramme du robot A est-il bien différent des deux autres. Expliquer.
Est-il pertinent de comparer ces trois diagrammes ?

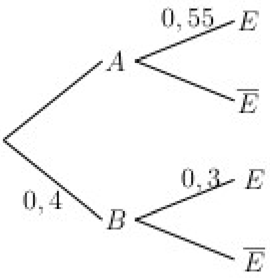
Entre les deux robots B et C , lequel semble le plus régulier ? Expliquer.

6) Probabilités

Les notions suivantes sont à réviser :

- Probabilité conditionnelle d'un événement B sachant un événement A de probabilité non nulle. Notation $p_A(B)$. Indépendance de deux événements.
- Arbres pondérés et calcul de probabilités : règle du produit, de la somme.
- Partition de l'univers (systèmes complets d'événements). Formule des probabilités totales.
- Succession de deux épreuves indépendantes. Représentation par un arbre ou un tableau.

a) Probabilités conditionnelles



Exercice 22 :

Compléter l'arbre pondéré de probabilité ci-contre.
Calculer alors p(A ∩ E), p(A ∩ $\bar{E}$) et p(E).

Exercice 23 :

Une entreprise de textile emploie 300 personnes dans le secteur confection. Il est composé de trois ateliers. L'atelier de stylisme est constitué de 50 personnes. L'atelier de découpe est constitué de 100 personnes. Le reste du personnel travaille dans l'atelier de couture. Après une étude sur l'absentéisme, le directeur des ressources humaines a constaté que sur une année :

• 30% des stylistes ont eu au moins une absence ;
• 15% du personnel de découpe ont eu au moins une absence ;
• 90% du personnel de l'atelier de couture n'ont pas eu d'absence.

On choisit une personne au hasard dans cette entreprise et l'on admet que chaque personne a la même probabilité d'être choisie. On note :

— S l'évènement : « la personne choisie travaille à l'atelier de stylisme » ;
— D l'événement : « la personne choisie travaille à l'atelier de découpe » ;
— C l'événement : « la personne choisie travaille à l'atelier de couture » ;
— A l'événement : « la personne choisie a eu au moins une absence » .

Si M et N sont deux événements, on note $\bar{M}$ l'événement contraire de M l'événement et $p_N(M)$ la probabilité de l'événement M sachant N.

1. Déduire des informations de l'énoncé :
   a) Les probabilités p(S), p(D) et p(C) des événements S, D et C.
   b) Les probabilités $p_S(A)$, $p_D(A)$ et $p_C(\bar{A})$.
2. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
3. Calculer la probabilité de l'événement S ∩ A, notée p (S ∩ A).
4. Démontrer que p(A) = 0, 15.
5. On sait que la personne choisie a eu au moins une absence cette année. Quelle est la probabilité que cette personne soit un styliste ?

b) Notion de variable aléatoire, espérance et écart-type

COURS :

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie supposée équilibrée et on note à chaque lancer, F quand on obtient « Face » et P quand on obtient « Pile ».

L'**univers** E associé à cette expérience aléatoire est : {PP, PF, FP, FF}

Chaque élément de cet univers est appelé **issue**. Toutes les issues ont ici la même probabilité (0,25), on dit qu'elles sont équiprobables.

Une variable aléatoire sur E :

On convient que chaque « Pile » obtenu fait gagner 1€ et que chaque « Face » fait perdre 2€.

La fonction *X* qui, à chaque issue de E, associe le gain du joueur, prend comme valeurs : $x_1=-4$, $x_2=-1$ et $x_3=2$ avec des probabilité $p_{1,}$ p_2 et p_3 que l'on peut calculer.

On notera $p_i=P(X=x_i)$

On peut organiser les résultats sous la forme d'un tableau :

Gain x_i	- 4	- 1	2
Probabilité $p_i=P(X=x_i)$	0,25	0,5	0,25

Écrire un tel tableau revient à définir ce qu'on appelle une **loi de probabilité**.

Définition : On considère l'univers E composé de *n* issues liées à une expérience aléatoire.

- On appelle **variable aléatoire** définie sur E toute fonction *X* de E dans $\mathbb{R}$.
  A chaque issue e_i , la variable aléatoire *X* associe un nombre x_i .
- **Définir une loi de probabilité** sur l'ensemble des *n* valeurs de x_i , c'est associé à chaque x_i sa probabilité p_i . On utilisera un tableau tel que celui-ci pour résumer les résultats.

Valeurs prises par X	x_1	x_2	….	x_n
$p_i=P(X=x_i)$	p_1	p_2	….	p_n

On dit que *X* a pour loi de probabilité $(x_i\,;\,p_i)$ avec $i\in\{1;...;n\}$.

- On notera que : $\boldsymbol{p_1+p_2+...+p_n=1}$

Définition :

Soit *X* une variable aléatoire de loi de probabilité $(x_i\,;\,p_i)$ avec $i\in\{1;...;n\}$.

On appelle **espérance de *X*** le nombre noté E(X) (ou $\bar{X}$) défini par :

$$E(X)=x_1\times P(X=x_1)+x_2\times P(X=x_2)+...+x_n\times P(X=x_n)=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i$$

Exemple : Si on reprend notre jeu, on a une espérance de :

$$E(X)=x-4\times 0{,}25+(-1)\times 0{,}5+2\times 0{,}25=-1$$

En moyenne, le joueur perd 1€ en jouant à ce jeu.

Définition : On appelle **variance de *X*** le nombre noté *V*(X) défini par :

$$V(X)=p_1(x_1-E(X))^2+p_2(x_2-E(X))^2+...+p_n(x_n-E(X))^2=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-E(X))^2 .$$

On appelle **écart-type de *X*** le nombre noté σ(*X*) défini par : σ(*X*) = $\sqrt{V(X)}$

Exercice 24 :

Un jeu consiste à tirer au hasard une carte d’un jeu de 52 cartes. On suppose les éventualités équiprobables. À chaque tirage en associe un gain ou une perte définie de la façon suivante :

Si on tire un as on gagne 5 €

Si on tire un roi, une dame ou un valet, on gagne 1 €

Dans tous les autres cas en perd 1 €.

Soit X le gain algébrique associé à chaque tirage.

1) Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

2) Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 25 :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	0,5	1	3	4	5
p_i	0,2	0,15	0,05	a	0,32	0,18

1) Déterminer la valeur de a.
2) Calculer $p(X>1)$.
3) Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.

Exercice 26 :

Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20% des chaudières sont sous garantie. Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{100}$. Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{10}$.

On appelle G l'évènement suivant : « la chaudière est sous garantie » et D l'évènement suivant : « la chaudière est défectueuse ».

1. Faire un arbre de probabilités illustrant cette situation.
2. Déterminer la probabilité que la chaudière soit défectueuse.
3. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle soit sous garantie.
4. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse. On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Déterminer son espérance mathématique de X et interpréter le résultat.